7. Röpzárthelyi

Időpont: 2017. május 11. (csütörtök) és 12. (péntek), a 14. heti gyakorlatokon.

Elmélet:

1. Fogalmazza meg a Markov-egyenlőtlenséget (feltételekkel együtt)!
2. Fogalmazza meg a Csebisev-egyenlőtlenséget (feltételekkel együtt)!
3. Fogalmazza meg a nagy számok törvényét!
4. Fogalmazza meg a centrális határeloszlás-tételt!

Példák:

1. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelynek értékei $0,\ 1,\ 2, \ldots$ nemnegatív egész számok. Tudjuk, hogy a $\xi = k$ esemény valószínűsége arányos $\frac{1}{k!}$ -sal. Határozzuk meg a $P(\xi = k)$ valószínűségeket!

2. Lehet-e az
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1+2x}{x-0{,}8}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$
függvény eloszlásfüggvény?

3. Legyen
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1 \\ A + \frac{B}{x+1}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$
   a.) Az A és B milyen értékeire lehet F eloszlásfüggvény?
   b.) Ábrázoljuk F-et!
   c.) Határozzuk meg az eloszlás sűrűségfüggvényét!
   d.) Számítsuk ki a $P(\xi > 9)$ valószínűséget!

4. Az A és B paraméterek mely értékeire lehet $F(x) = A + B \arctan x$, $(-\infty < x < \infty)$ eloszlásfüggvény?

5. Legyen
$$f(x) = \begin{cases} A\ \left(x + \frac{1}{2}\right), & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{különben} . \end{cases}$$
   a.) Az A paraméter milyen értékére lehet f sűrűségfüggvény?
   b.) Határozzuk meg az eloszlás F eloszlásfüggvényét!
   c.) Számítsuk ki a $P(0 < \xi < 0,3)$ valószínűséget!

6. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x \geq a, \\ 0, & \text{ha } x < a. \end{cases}$$
   a.) Határozzuk meg az a értékét!
   b.) Számítsuk ki a $P(\xi \geq \ln 2)$ valószínűséget!
   c.) Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórását!

7. Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül választunk két pontot találomra. Legyen a valószínűségi változó a két pont távolsága. Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét!

8. Egy céllövés során minden találat egy 18 cm sugarú körlapra jut. A lövés a körlap bármely pontjára azonos eséllyel találhat. Számítsuk ki a találat helyének a kör középpontjától való távolságának szórását!

9. Mutassuk meg, hogy a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 1 \\ \frac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak nem létezik szórása.

10. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \ge 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!

11. Jegyzet: 2.2.2 - 2.2.3 kidolgozott feladatok (29-32. old.), 2.3.1 - 2.3.2 gyakorló feladatok (37. old.)
Jegyzet: 3.2.1 - 3.2.6 kidolgozott feladatok (44-48. old.), 3.3.1 - 3.3.4 gyakorló feladatok (49. old.)

12. Egy ismeretlen eloszlású valószínűségi változó várható értéke $m = 20$, szórása $\sigma = 2$.
    - a.) Adjunk becslést az $A : 15 < \xi < 25$ esemény bekövetkezési valószínűségére!
    - b.) Mennyi az esemény bekövetkezési valószínűsége, ha a valószínűségi változó
        - b1.) normális eloszlású,
        - b2.) binomiális eloszlású?
    - c.) Lehet-e exponenciális eloszlású?

13. Egy üzemben csavarokat csomagolnak. Egy-egy dobozba átlagosan 5000 csavar kerül. A csavarok számának szórása a tapasztalat szerint 20 darab. Mit mondhatunk annak a valószínűségéről, hogy egy dobozban a csavarok száma 4900 és 5100 közé esik, ha az eloszlást nem ismerjük?

14. Automata vizsgálót használva, 10^5 számú vizsgálat után milyen biztonsággal állíthatjuk, hogy a selejt előfordulásának relatív gyakorisága és a tényleges selejt-arány legfeljebb $0,01$-dal tér el egymástól?

15. Egy ládában kétféle méretű csavar van összekeverve igen nagy mennyiségben. A számunkra megfelelő csavar aránya 70%. A ládából véletlenszerűen kiemelünk 10000 darabot.
    - a.) Mennyi lesz ezek között a céljainknak megfelelő csavarok várható száma?
    - b.) Mennyi a valószínűsége, hogy a megfelelő csavarok számának valódi értéke a várható értéktől annak legfeljebb 5%-ával tér el?

16. Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak valószínűsége, hogy egy szál meghatározott időtartam alatt elszakad $0,008$ minden szálra. Határozzuk meg, hogy $0,95$ valószínűséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma az adott időtartam alatt!