6. Röpzárthelyi Időpont: 2017. április 27. (csütörtök) és május 5. (péntek).

Elmélet:

1. Definiálja az eseményalgebra fogalmát!
2. Írja le a $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ függvény azon 3 tulajdonságát, ami mellett valószínűséget határoz meg!
3. Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát!
4. Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?
5. Mikor nevezünk két eseményt függetlennek?
6. Fogalmazza meg a Teljes valószínűség tételét!
7. Fogalmazza meg a Bayes-tételt!
8. Mit nevezünk valószínűségi változónak, és hogyan definiáljuk az eloszlásfüggvényét?
9. Mi az a 4 tulajdonság, ami karakterizálja az eloszlásfüggvényt?
10. Mit nevezünk diszkrét valószínűségi változónak?
11. Mit nevezünk abszolút folytonos valószínűségi változónak?
12. Mit az a 3 tulajdonság, ami karakterizálja a sűrűségfüggvényt?
13. Hogyan definiáljuk egy diszkrét valószínűségi változó várható értékét és szórását? Milyen képlettel számoljuk ki őket?
14. Hogyan definiáljuk egy abszolút folytonos valószínűségi változó várható értékét és szórását? Milyen képlettel számoljuk ki őket?
15. Sorolja fel a várható érték és a szórás tulajdonságait!
16. Mit értünk a ξ, η diszkrét valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlásán?
17. Mit értünk a ξ, η abszolút folytonos valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlásán?
18. Mikor nevezzük a ξ, η valószínűségi változókat függetlennek? Mi a kapcsolat a független valószínűségi változók illetve a várható érték és a szórás között?
19. Mit értünk a ξ, η valószínűségi változók kovarianciáján, és mikor nevezzük őket korrelálatlannak?
20. Mikor nevezünk egy diszkrét valószínűségi változót binomiális eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
21. Mikor nevezünk egy diszkrét valószínűségi változót Poisson eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
22. Mikor nevezünk egy abszolút folytonos valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
23. Mikor nevezünk egy abszolút folytonos valószínűségi változót exponenciális eloszlásúnak? Mennyi a várható értéke és a szórása?
24. Mikor nevezünk egy abszolút folytonos valószínűségi változót m várható értékű és σ szórású normális eloszlású valószínűségi változónak?

Példák:

1. A Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris másodrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

   a.)
   $$x''(t) + 4x(t) = \cos t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

   b.)
   $$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^t, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

   c.)
   $$x''(t) + 4x(t) = f(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0,$$

   ahol
   $$\begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad f(t+2k) = f(t), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

2. A Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

   a.)
   $$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1, \end{cases} & x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) - x(t) &= 0, & y(0) = 1. \end{aligned}$$

   b.)
   $$\begin{aligned} \dot{x}(t) + y(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1, \end{cases} & x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) + x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ 0, & t \ge 2, \end{cases} & y(0) = 0. \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az alábbi f és g függvények konvolucióját, és a megadott Laplace transzformálta(ka)t!

   a.) $f(t) = \sqrt{t}$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$ és $L(\sqrt{t})$.

   b.) $f(t) = e^t$, $g(t) = f(t)$, $L(f \star g)$.

4. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az
   $$\begin{aligned} x'(t) &= \int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$
   integro-differenciálegyenletet!

<u>Táblázat részlet:</u> $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$, $\quad \mathcal{L}(\eta(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$, $\quad \mathcal{L}(\eta(t))(s) = \frac{1}{s}$,
$\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{1+s^2}$, $\quad \mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{1+s^2}$.

5. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a klasszikus valószínűség témakörből!

   a.) Egy 52 lapos kártyacsomagból 13 lapot találomra kihúzunk. (Az egyszer kihúzott lapot nem tesszük vissza a csomagba.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy

   a1.) a treff király a kihúzott lapok között lesz;

   a2.) pontosan két treff lesz a kihúzott lapok között;

   a3.) a treff király és a treff ász is a kihúzott lapok között lesz;

   a4.) legalább egy treff lesz a kihúzott lapok között?

   b.) Kitöltünk egy ötös lottószelevényt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

   b1.) pontosan 3 találatunk lesz;

  - b2.) legalább 3 találatunk lesz;
  - b3.) legfeljebb 3 találatunk lesz?

- c.) Jegyzet: 1.2.3/a, 1.2.4 kidolgozott feladat (14-16. old.), 1.3.1 gyakorló feladat (19. old.)

6. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a geometriai valószínűség témakörből!

   a.) Háromszög szerkeszthetőségének valószínűsége. A $(0,1)$ intervallumon találomra kiválasztunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett 3 szakaszból háromszög szerkeszthető?

   b.) Ketten megbeszélik, hogy de. 10 és 11 óra között egy meghatározott helyen találkoznak. Megállapodás szerint, aki korábban érkezik 20 percet vár a másikra. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?

   c.) Az $x^2 + b\,x + c = 0$ másodfokú egyenlet b és c együtthatóit válasszuk véletlenszerűen a $(-2, 2)$ intervallumból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyenlet gyökei valós számok lesznek?

   d.) Jegyzet: 1.2.5, 1.2.6 kidolgozott feladat (16-17. old.), 1.3.5 gyakorló feladat (20. old.)

7. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a feltételes valószínűség, függetlenség témakörből!

   a.) Egy urnában 6 fehér és 4 fekete golyó van. Egymás után kihúzunk 2 golyót (visszatevés nélkül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy másodikra feketét húzunk, feltéve, hogy az első fehér volt?

   b.) Három kockával dobunk egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kocka hatost mutat, feltéve hogy az egyes kockák különböző jelzésű számokat mutatnak?

   c.) Egy munkás 2 gépen dolgozik. Az első gépet 0.87, a másodikat 0.90 valószínűséggel nem kell javítani egy műszak alatt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

   - c1.) legfeljebb 1 géppel kell foglalkoznia;
   - c2.) pontosan 1 géppel kell foglalkoznia

   javítás céljából egy műszak alatt, ha a gépek meghibásodása egymástól független?

   d.) Három urnában fekete és fehér golyók vannak: az elsőben 3 fekete és 2 fehér, a másodikban 4 fekete és 3 fehér, a harmadikban 5 fekete és 4 fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, mégpedig az elsőt 1/2, a másodikat 1/3, a harmadikat 1/6 valószínűséggel. A kiválasztott urnából kihúzunk egy golyót úgy, hogy minden golyó kihúzása azonos valószínűségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy fehéret húzunk?

   e.) Egy rekeszben 15 labda van, amelyek közül 9 új. Az első játékhoz találomra kiveszünk 3 labdát, és ezeket játék után visszatesszük. A második játékhoz ismét 3 labdát veszünk ki találomra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utóbb kivett labdák mind újak lesznek?

   f.) Három urnában fekete és fehér golyók vannak: az elsőben 3 fekete és 2 fehér, a másodikban 4 fekete és 3 fehér, a harmadikban 5 fekete és 4 fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, mégpedig az elsőt 1/2, a másodikat 1/3, a harmadikat 1/6 valószínűséggel. A kiválasztott urnából kihúzunk egy golyót úgy, hogy minden golyó kihúzása azonos valószínűségű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első urnából húztunk, feltéve, hogy a húzás eredménye fehér?

   g.) N pénzérme között kettőnek mindkét oldalán fej van, a többi érme hibátlan. Találomra kiválasztunk egy érmét és háromszor feldobjuk. Eredményül mindig fejet kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy hibás érmét választottunk?

   h.) Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyek között rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6 golyó fehér. Egy találomra kiválasztott dobozból 3 golyót húzunk visszatevéssel. Azt találjuk, hogy mindhárom húzásra fehér golyót vettünk ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 6 golyó közül éppen 2 fehér volt a dobozban?

   g.) Jegyzet: 1.2.3/b,c, 1.2.7, 1.2.8 kidolgozott feladat (14. és 17-19. old.), 1.3.3, 1.3.4, 1.3.6 gyakorló feladat (19-20. old.)