5. Röpzárthelyi Időpont: 2017. április 13. (csütörtök) és 21. (péntek)

Elmélet:

1. Hogyan értelmezzük egy f függvény Laplace transzormáltját?
2. Milyen feltételt ismer a Laplace transzformált létezésére?
3. Hogyan értelmezzük a f és g függvények $f \star g$ konvolucióját?
4. Mit tud a $f \star g$ konvolució Laplace transzormáltjáról?
5. Fogalmazza meg a folytonos és deriválható f függvény folytonos deriváltjának Laplace-transzformáltjára vonatkozó tétel!
6. Fogalmazza meg az n-szer ($n \in \mathbb{N}$) folytonosan differenciálható f függvény n-dik deriváltjának Laplace-transzformáltjára vonatkozó tétel!
7. Fogalmazza meg a folytonos f függvény és $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ integrálfüggvényének Laplace-transzformáltjaira vonatkozó összefüggést!
8. Fogalmazza meg a hasonlósági tételt!
9. Fogalmazza meg az 1. eltolási tételt!
10. Fogalmazza meg a 2. eltolási tételt!

Példák:

1. Írjuk fel az alábbi adatokra a Lagrange féle interpolációs polinomot, és számítsuk ki a polinom értékét a megadott $\overline{x}$ helyen.

a.)

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	8	27

$\overline{x} = -1,$

b.)

x_i	-1	1	2	3
y_i	-8	0	1	8

$\overline{x} = 0,$

c.)

x_i	-1	1	-2	2
y_i	0	8	-1	27

$\overline{x} = 0,$

d.)

x_i	0	-1	1	2
y_i	0	1	0	3

$\overline{x} = -2.$

2. Írjuk fel az alábbi adatokra az Hermite-féle interpolációs polinomot!

x_i	0	1
y_i^0	0	1
y_i^1	0	3
y_i^2	–	6

x_i	0	2
y_i^0	-1	3
y_i^1	–	3

x_i	0	1
y_i^0	1	2
y_i^1	–	3

3. Számítsuk ki az e^{At} mátrixot az alábbi mátrixokra!

a.)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

c.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait!

a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ (egységugrás vagy Heaviside függvény)

b) e^{kt}

c) $\sin(\omega t)$

d) $\cos(\omega t)$

e) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a \end{cases}$, $a > 0$ tetszőleges. (egységugrás vagy Heaviside függvény eltoltja)

5. Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris elsőrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)

$$y'(t) - y(t) = 2, \qquad y(0) = 1.$$

b.)

$$y'(t) - y(t) = \sin t, \qquad y(0) = 0.$$

c.)

$$y'(t) - 2y(t) = \cos t, \qquad y(0) = 0.$$

6. A Laplace transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi, lineáris elsőrendű differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték feladatokat!

a.)

$$y' - y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2, \text{ vagy } x \geq 3, \\ 1, & 2 \leq x < 3 \end{cases} \qquad y(0) = -1.$$

b.)

$$y'(t) - y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}, \qquad y(0) = 1.$$

c.)

$$y'(t) + 2y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \qquad y(0) = -1.$$

d.)

$$y'(t) + y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}, \qquad y(0) = -1.$$

<u>Táblázat részlet:</u> $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a)$, $\mathcal{L}(\eta(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}(\eta(t))(s) = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{1+s^2}$, $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{1+s^2}$.