4. Röpzárthelyi

Időpont: 2017. március 30. (csütörtök) és 31. (péntek), a 8. heti gyakorlatokon.

Elmélet:

1. Fogalmazza meg a Lagrange-féle interpoláció alapfeladatát!
2. Definiálja a Langrange-féle interpolációs polinomot!
3. Fogalmazza meg a Lagrange-féle interpoláció hibájára vonatkozó állítást!
4. Fogalmazza meg a Lagrange-féle interpoláció hibájára vonatkozó állítást egyenletesen korlátos függvény (és deriváltjai) esetében!
5. Fogalmazza meg az Hermite-féle interpoláció alapfeladatát!
6. Fogalmazza meg a homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldására vonatkozó tételt!
7. Fogalmazza meg az állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alapmátrixára vonatkozó tételt!
8. Fogalmazza meg a Cayley-Hamilton tételt!
9. Fogalmazza meg az $f(A)$ mátrix-függvény létezésére vonatkozó tételt!
10. Definiálja az $\exp A$ mátrix exponens fogalmát és sorolja fel a tulajdonságait!
11. Fogalmazza meg az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer és a mátrix-exponens kapcsolatára vonatkozó tételt!
12. Fogalmazza meg az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer és a mátrix-exponens kapcsolatára vonatkozó tételt!

Példák:

1.) Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduum tétel segítségével! (Minden görbe pozitív irányítású.)

a.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z-1}{z^3}\,\mathrm{dz}, \qquad \gamma : |z| = 2,$ b.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin 2z}{z^3+z^2}\,\mathrm{dz}, \qquad \gamma : |z| = \frac{1}{2},$

c.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^3+z^2}\,\mathrm{dz}, \qquad \gamma : |z| = \frac{1}{2},$ d.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2-1}\,\mathrm{dz}, \qquad \gamma : |z| = 2,$

e.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2} \sin z\,\mathrm{dz}, \qquad \gamma : |z| = \frac{1}{2}$, f.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2} \cos z\,\mathrm{dz}, \qquad \gamma : |z| = \frac{1}{2}$.

2. Döntsük el, hogy az alábbi halmazok közöl melyek alkotnak lineáris vektorteret! Válaszunkat indokoljuk!

a.) $\mathbb{R}^n$,
b.) $\Pi_n = \{$legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok$\}$,
c.) $\widetilde{\Pi}_n = \{$1 főegyütthatójú, legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok$\}$,
d.) $\overline{\Pi}_n = \{p \in \Pi_n : p(1) = 0\}$,
e.) $C_{[a,b]}$,
f.) $\Sigma_{[a,b]}$ (az $[a, b]$-n Riemann szerint integrálható függvények halmaza).

3. Igaz-e, hogy

   a.) Π_n a $C_{[a,b]}$ -nek ,

   b.) $\widetilde{\Pi}_n$ a Π_n -nek,

   c.) $C_{[a,b]}$ a $\Sigma_{[a,b]}$ -nek,

   d.)
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \right\}$$
   az $\mathbb{R}^4$ -nek,

   e.)
$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 1 \right\}$$
   az $\mathbb{R}^4$ -nek,

   f.) $S = \left\{ f \in C^2_{\mathbb{R}} : \ f''(x) + f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}$ a $C_{\mathbb{R}}$ -nek

   altere? Válaszunkat indokoljuk!

4. Adjunk meg egy-egy bázist az $\mathbb{R}^n$, Π_n, $\overline{\Pi}_n$ és S térben, és mondjuk meg a tér dimenzióját!

5. Számítsuk ki az alábbi adatokhoz legkisebb négyzetek értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb másodfokú polinomot! Ábrázoljuk vázlatosan a kapott eredményt!

   a.) $(-2;-1), \ (-1;-1), \ (0;0), \ (1;1), \ (2;1)$

   b.) $(0;1), \ (1;-1), \ (2;0), \ (3;-1), \ (4;1)$

   c.) $(-2;-1), \ (-1;1), \ (0;-1), \ (1;1), \ (2;-1)$

   d.) $(-3;1), \ (-1;-1), \ (0;0), \ (1;-1), \ (3;1)$

6. Legyen $f \in L^2(-1,1)$ az alábbiakban megadott függvény! Keresendő az a $p_1(x) = a_1 x + a_0$ polinom, amelyre
$$\int_{-1}^{1} (f(x) - p_1(x))^2 dx \to \min!$$
   Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert, és számoljuk ki a polinom együtthatóit!

   a.)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ -1, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

   b.)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup (0,1] \\ -1, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

   c.)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

   d.)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right] \\ 1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

7. Legyen $f \in L^2(-1,1)$ az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -1, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Keresendő az a $p_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinom, amelyre

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - p_4(x))^2 dx \to min$$

Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert!

8. Tekintsük az $f_i \in L^2(-1,1)$ elemeket, ahol $f_1 \equiv 1$, $f_2 \equiv x$, $f_3 \equiv x^2$. Keressünk olyan p_i, $i = 0,1,2$ pontosan i-edfokú polinomokat, amelyek ortogonálisak $L^2(-1,1)$ -ben! Normáljuk a kapott polinomokat úgy, hogy $p_i(1) = 1$, $i = 0,1,2$ teljesüljön!

9. a.) Annak ismeretében, hogy az $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ függvények bármely pozitív hosszúságú intervallumon lineárisan függetlenek, a Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan másodfokú polinomot, amely $L^2(0,2)$ értelemben ortogonális a $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x - 1$ polinomokra!

   b.) Annak ismeretében, hogy az $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ függvények bármely pozitív hosszúságú intervallumon lineárisan függetlenek, a Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan másodfokú polinomot, amely $L^2(-2,0)$ értelemben ortogonális a $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = -x - 1$ polinomokra!

10. A Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással határozzunk meg olyan pontosan i-edfokú p_i polinomokat $i = 0, 1, 2$ -re, amelyek az alábbi x_j értékekre vonatkozóan ortogonális rendszert alkotnak!

   a.)

x_j	-2	-1	0	1	2

   b.)

x_j	0	1	2	3	4