3. Röpzárthelyi

Időpont: 2017. március 16. (csütörtök) és 17. (péntek), a 6. heti gyakorlatokon.

Elmélet:

1. Mikor nevezünk egy V halmazt vektortérnek?
2. Mit jelent az, hogy a V vektortérbeli $b_1, \ldots, b_k$ vektorok lineárisan függetlenek?
3. Mit jelent az, hogy a $b_1, \ldots, b_n$ vektorok a V vektortér bázisát alkotják?
4. Mit jelent az, hogy a H halmaz a V vektortér altere?
5. Milyen összefüggést ismer egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektornak két különböző, $b_1, \ldots, b_n$ illetve $c_1, \ldots, c_n$ bázisra vonatkozó koordinátái között?
6. Mikor nevezünk egy leképezést lineáris operátornak?
7. Milyen kapcsolatot ismer vektorterek közötti lineáris leképezések és az ezeknek megfelelő méretű valós elemű mátrixok között?
8. Mikor nevezünk egy $a, b \in V \mapsto \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$ leképezést skaláris szorzatnak?
9. Definiálja a vektortérbeli norma fogalmát!
10. Cauchy - Schwarz - Bunyakovszkij egyenlőtlenség.
11. Mikor nevezünk egy $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ függvényt négyzetesen integrálhatónak?
12. Minkowski-egyenlőtlenség.
13. Fogalmazza meg a legkisebb négyzetek feladatát véges számú diszkrét pontra vonatkoztatva!
14. Fogalmazza meg a legkisebb négyzetek feladatát adott véges $x \in [a, b]$ intervallumra vonatkoztatva!
15. Írja fel azt az egyenletrendszert, amelyből megkaphatjuk a véges $x \in [a, b]$ intervallumon kitűzött legkisebb négyzetek feladat megoldását!
16. Mikor mondjuk azt, hogy a $\{\varphi_k \in L^2(a, b) : \ k \in \mathbb{N}\}$ ortogonális, illetve ortonormált függvényrendszert alkot?
17. Ismertesse a Gram-Schmidt féle ortogonalizációs eljárást!

Példák:

1. Írja fel az alábbi függvények Taylor-sorát a $z_0 = 0$ körül!

   a.) e^z, b.) $\sin z$, $\cos z$, c.) $\mathrm{sh} z$, $\mathrm{ch} z$.

2. Írja fel az alábbi függvények Laurent-sorát!

   a.) $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$ a $z_0 = 1$ körül,
   b.) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ a $z_0 = 0$ körül a következő tartományokra: • $|z| < 1$; • $1 < |z| < 2$; • $2 < |z|$.
   c.) $f(z) = \frac{z^2+z+3}{z^2-1}$ a $z_0 = 1$ körül.
   d.) $f(z) = \frac{e^z}{z^k}$ a $z_0 = 0$ körül.
   e.) $f(z) = \frac{2z}{(z+1)^2(z-4)}$ a $z_0 = -1$ körül.
   f.) $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.
   g.) $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$ a $z_0 = 0$ körül.

3.) Számítsa ki az alábbi függvények reziduumát:

a.) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ $z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.

b.) $f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}$ $z_0 = \pi$ pólusra vonatkozóan.

c.) $f(z) = \frac{3z^2+1}{z^4-1}$ $z_0 = \pm 1,\ \pm i$ pólusra vonatkozóan.

d.) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ $z_0 = 1$ pólusra vonatkozóan.

e.) $f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}$ $z_0 = -i$ pólusra vonatkozóan.

f.) $f(z) = \frac{\sin 5z}{(z-i)^4}$ $z_0 = i$ pólusra vonatkozóan.