2. Röpzárthelyi anyaga (A 2. röpzárthelyi időpontja: pénteki csoportoknak a 4. oktatási hét gyakorlati órái, csütörtöki csoportoknak az 5. hét gyakorlati órái)

Elmélet:

1. A komplex függvénytan főtétele (Cauchy-tétel).
2. Milyen feltételt tud arra vonatkozóan, hogy a komplex vonalintegrál csak a görbék kezdő- és végpontjától függjön?
3. Mit nevezünk egy analitikus f komplex függvény F primitív függvényének egy D tartományon?
4. Milyen feltételt ismer a primitív függvény létezésére?
5. Írja fel a Cauchy-féle integrálformulát!
6. Hogyan szól egy analitikus komplex függvény Taylor-sorral való előállításáról szóló tétel?
7. Írja fel az általánosított Cauchy-formulát (feltételekkel együtt)!
8. Hogyan szól a Liouville-tétel?
9. Adja meg az izolált szinguláris hely definícióját és szingularitás típusait!
10. Hogyan szól egy körgyűrűben analitikus komplex függvény Laurent-sorral való előállíthatóságáról szóló tétel?
11. Hogyan értelmezzük az f komplex függvény z_0 izolált szinguláris helyéhez tartozó reziduumát?
12. Fogalmazza meg a reziduum-tételt!
13. Hogyan számítható ki a reziduum egyszeres, illetve m-szeres ($m > 1$) pólusra vonatkozóan?

Példák:

1. Létezik-e az alábbi vektormezőnek komplex potenciálja? Ha igen, adja meg!

   a.) $\underline{p}(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1-y) \\ -2x \end{pmatrix}$

   b.) $\underline{p}(x,y) = \frac{1}{x+y}\underline{i} + \frac{1}{x+y}\underline{j}$

   c.) $\underline{p}(x,y) = (\cos x \,\mathrm{ch} y)\,\underline{i} + (\sin x \,\mathrm{sh} y)\,\underline{j}$

   d.) $\underline{p}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\underline{i} - \frac{2xy}{(y^2+x^2)^2}\underline{j}$

2. A Cauchy-tétel vagy formula alkalmazása NÉLKÜL számítsa ki az alábbi függvények vonalintegrálját:

   a.) $f(z) = z^2$ — γ_1: $z_1 = 1$-ből $z_2 = -1$-be vezető egyenes mentén
   γ_2: $z_1 = 1$-ből $z_2 = -1$-be vezető felső félkörív mentén.

   b.) $f(z) = \overline{z}$ — γ_1: $z_1 = 0$-ból $z_2 = 1$-be, majd $z_3 = 1 + i$-be vezető egyenes mentén
   γ_2: $z_1 = 0$-ból $z_2 = 1 + i$-be vezető egyenes mentén

   c.) $f(z) = 3z^2$ — γ_1: $z_1 = 0$-ból $z_2 = x$-be, majd $z_3 = x + iy$-ba vezető egyenes mentén
   γ_2: $z_1 = 0$-ból $z_2 = iy$-ba, majd $z_3 = x + iy$-ba vezető egyenes mentén

   d.) $f(z) = \frac{1}{z}$ — γ_1: $z_1 = 1$-ből $z_2 = -1$-be vezető felső félkörív mentén
   γ_2: $z_1 = 1$-ből $z_2 = -1$-be vezető alsó félkörív mentén

   e.) $f(z) = |z|$ — γ_1: $z_1 = -i$-ből $z_2 = i$-be, vezető egyenes mentén
   γ_2: $z_1 = -i$-ből $z_2 = i$-be vezető jobb oldali félkörív mentén

   f.) $f(z) = z^2$ — γ_1: $z_1 = 0$-ból $z_2 = 1 + i$-be, vezető egyenes mentén
   γ_2: $z_1 = 0$-ból $z_2 = 1 + i$-be vezető $y = x^2$ parabolaív mentén

A továbbiakban minden görbe pozitív irányítású.

3. A Cauchy-tétel vagy a Cauchy-formula felhasználásával számítsa ki az alábbi integrálokat!

   a.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2-1} dz, \qquad \gamma : \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1.$

   b.) $\oint\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z(z^2-1)}, \qquad \gamma_1 : |z - 4i| = 1; \;\; \gamma_2 : |z| = \frac{1}{2}; \;\; \gamma_3 : |z-1| = \frac{1}{2}; \;\; \gamma_4 : |z+1| = \frac{3}{4}; \;\; \gamma_5 : |z| = 2.$

   c.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^4+1} dz, \qquad \gamma : x^2 + y^2 = 2x.$

   d.) $\oint\limits_{\gamma} \left(\frac{\sin z}{z(z-1)(z-2)} + z \sin z \right) dz, \qquad \gamma : |z-1| = \frac{1}{2}.$

   e.) $\oint\limits_{\gamma} \left(\frac{\cos z}{z(z-1)(z-2)} + z \cos z \right) dz, \qquad \gamma : |z-1| = \frac{1}{2}.$

   f.) $\oint\limits_{\gamma} \left(\frac{\overline{z}}{z} + \frac{e^z}{z} \right) dz, \qquad \gamma : |z| = 1.$

4. Számítsa ki az alábbi integrálokat az általánosított Cauchy-formula segítségével!

   a.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^3} dz, \qquad \gamma : |z| = 2.$

   b.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin 2z}{z^3+z^2} dz, \qquad \gamma : |z| = \frac{1}{2}.$

   c.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^3+z^2} dz, \qquad \gamma : |z| = \frac{1}{2}.$

   d.) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2} dz, \qquad \gamma : |z| = 2.$