Mátrix exponens, Laplace-transzformáció

Matematika M1 gépészmérnököknek

2017. március 20., 27.

LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK ÉS A MÁTRIX EXPONENS KAPCSOLATA

Feladat - ismétlés

Tegyük fel, hogy

$$A(t) = (a_{ik}(t)), \quad i, k = 1, \ldots, n \quad \text{és} \quad b(t)$$

folytonos mátrix-függvények adott $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, és legyen $(t_0, x^0) \in I \times \mathbb{R}^n$ adott. Tekintsük ekkor az

$$\underline{\dot{x}}(t) = A(t)\underline{x}(t) + b(t), \quad \underline{x}(t_0) = x^0$$

kezdeti-érték feladatot, mely

- $b(t) \equiv 0$ esetén *homogén*,
- $b(t) \neq 0$ esetén *inhomogén*.

Tétel 1.

Ha $A(t)$ és $b(t)$ folytonosak I-n, akkor a fenti lineáris kezdetiérték feladatnak mindig létezik egyértelmű, a teljes I intervallumon értelmezett megoldása.

Megoldás - ismétlés

Tétel 2.

Ha $A(t)$ folytonos I-n, akkor a homogén rendszer megoldásai közt található pontosan n darab lineárisan független megoldás, és bármely más megoldás ezek lineáris kombinációjaként áll elő.

Azaz,

- ha $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ az alaprendszer, akkor $\phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ a rendszer alapmátrixa;
- az alaprendszer függvényei egy n-dimenziós alteret alkotnak a $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ vektortérben, és ők alkotják az altér bázisát;
- minden megoldás előállítható a $\phi(t)$ alapmátrix segítségével az

$$\underline{x}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x^0$$

alakban.

A $\phi(t)$ alapmátrix meghatározására persze általános módszerünk nincs! Ezen szeretnénk most segíteni!

Állandó együtthatós homogén rendszerek - ismétlés

Tekintsük most az

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t), \quad t \in I$$

rendszert, ahol A konstans $n \times n$-es mátrix.

Tétel 3.

Ha az A mátrixnak van n darab lineárisan független sajátvektora, akkor a fenti rendszer alapmátrixa

$$\phi(t) = (e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1, \dots, e^{\lambda_n t}\underline{s}_n)$$

alakú, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a mátrix sajátértékei, $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ pedig a normált, lineárisan független sajátvektorai.

Cél: a kiszámítás egyszerűsítése a numerikus analízis eszközeivel!

Előkészületek: mátrix-polinom

Legyenek adottak az a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ komplex számok, és tekintsük a komplex változós

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$$

polinomot.

Definíció 1.

Ha $A \in C^{n\times n}$, akkor a

$$p(A) = a_0 + a_1 A + \ldots + a_n A^n$$

polinomot komplex együtthatós mátrix-polinomnak nevezzük.

Tétel 4 (Cayley-Hamilton tétel).

Minden négyzetes mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, azaz $D(A) = 0$, ahol $D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Mátrix-polinom létezése

Legyen most az f komplex analitikus függvény olyan, mely értelmezve van a négyzetes mátrixok halmazán, és tekintsük az

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$$

sorfejtését.

Tétel 5.

Ha az

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$$

analitikus függvényt előállító hatványsor a $|\lambda| < \rho$ körlapon konvergens, és az A $n \times n$-es mátrix összes sajátértéke a konvergencia-tartományba esik, akkor az $f(A)$ $n \times n$-es mátrix létezik.

Bizonyítás vázlat

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az A sajátértékei $m_1, \ldots, m_k$, $m_1 + \ldots + m_k = n$ multiplicitással. Legyen továbbá

$$D(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

a mátrix karakterisztikus polinomja. Ekkor

$$D(\lambda_i) = D'(\lambda_i) = \ldots = D^{(m_i - 1)}(\lambda_i) = 0,$$

ahol $i = 1, \ldots, k$, $m_1 + \ldots + m_k = n$. Azaz az n darab $f^{(j)}(\lambda_i)$ adathoz létezik egyértelműen egy olyan $h(\lambda)$ Hermite-féle interpolációs polinom olyan, melyre

$$h^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i).$$

Megmutatható, hogy ekkor $f(A)$ létezik, és $f(A) = h(A)$.

Azaz $f(A)$ meghatározása nem más, mint egy Hermite-féle interpolációs polinom felépítése a sajátértékek rendszerére.

A differenciálegyenlet-rendszerek megoldása során az

$$f(\lambda) = e^{\lambda}$$

függvény közelítésére építjük majd a megfelelő Hermite-féle interpolációs polinomot.

Definíció 2.

Ha A $n \times n$-es mátrix, akkor

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

az exponenciális függvény sorfejtése alapján.

$f(A)$ meghatározásának menete

Azaz $f(A)$ meghatározása nem más, mint egy Hermite-féle interpolációs polinom felépítése a sajátértékek rendszerére.

A differenciálegyenlet-rendszerek megoldása során az

$$f(\lambda) = e^{\lambda}$$

függvény közelítésére építjük majd a megfelelő Hermite-féle interpolációs polinomot.

Definíció 2.

Ha A $n \times n$-es mátrix, akkor

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

az exponenciális függvény sorfejtése alapján.

Tétel 6.

(i) *Ha A és B felcserélhető $n \times n$-es mátrixok, akkor*

$$e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}.$$

(ii) *Az e^A mátrixnak létezik inverze, jele e^{-A}.*

(iii)

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tétel 7.

Az $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$ d.e. rendszer egy alapmátrixa a

$$\phi(t) = e^{At}$$

mátrix.

Kapcsolat a DER megoldása és a mátrix exponens közt

Azaz ha az Hermite-féle interpoláció feladatát az

$$f(\lambda, t) = e^{\lambda t}$$

függvényre írjuk fel, ahol t paraméterként, λ pedig változóként szerepel, akkor

$$e^{At} = h(A, t),$$

ahol

$$h^{(j)}(\lambda_i, t) = t^j \cdot e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, k,\ j = 0, \ldots, m_i - 1$$

feltételekből számolhatók ki a h polinom együtthatói.

Tétel 8.

Tekintsük az

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + b(t), \quad t \in I$$

állandó együtthatós inhomogén rendszert, ahol $b(t)$ *folytonos mátrix-függvény, és legyen a homogén rész alapmátrixa* e^{At}*. Ekkor az inhomogén rendszer általános megoldása*

$$\underline{x}(t) = e^{At}\left[\underline{c} + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} \cdot b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right], \quad t_0 \in I,\ \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

alakban írható fel.

LAPLACE-TRANSZFORMÁCÓ ÉS ALKALMAZÁSA DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA

Bevezető példa

Tekintsük egy autómotor erősen leegyszerűsített modelljét: tegyük fel, hogy

$$T \cdot \frac{dv}{dt} + v = K \cdot u,$$

ahol u a gázadás függvénye, v a fordulatszám, T, K állandók.

1. eset: legyen $u(t) = \delta(t)$ Dirac-delta és $v(-0) = 0$ a kezdeti feltétel. Ekkor

$$v(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T},$$

azaz egy hirtelen "gázfröccs" hatására a fordulatszám megugrik, majd exponenciális sebességgel lecseng az alaphelyzetre.

2. eset: legyen $u(t) = \eta(t)$ egységugrás függvény és $v(-0) = 0$ a kezdeti feltétel. Ekkor

$$v(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right),$$

azaz egy hirtelen ugrás után állandósuló gázadás hatására a fordulatszám is idővel állandósul.

Bevezető példa

Tekintsük egy autómotor erősen leegyszerűsített modelljét: tegyük fel, hogy

$$T \cdot \frac{dv}{dt} + v = K \cdot u,$$

ahol u a gázadás függvénye, v a fordulatszám, T, K állandók.

1. eset: legyen $u(t) = \delta(t)$ Dirac-delta és $v(-0) = 0$ a kezdeti feltétel. Ekkor

$$v(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T},$$

azaz egy hirtelen "gázfröccs" hatására a fordulatszám megugrik, majd exponenciális sebességgel lecseng az alaphelyzetre.

2. eset: legyen $u(t) = \eta(t)$ egységugrás függvény és $v(-0) = 0$ a kezdeti feltétel. Ekkor

$$v(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right),$$

azaz egy hirtelen ugrás után állandósuló gázadás hatására a fordulatszám is idővel állandósul.

Bevezető példa

Tekintsük egy autómotor erősen leegyszerűsített modelljét: tegyük fel, hogy

$$T \cdot \frac{dv}{dt} + v = K \cdot u,$$

ahol u a gázadás függvénye, v a fordulatszám, T, K állandók.

1. eset: legyen $u(t) = \delta(t)$ Dirac-delta és $v(-0) = 0$ a kezdeti feltétel. Ekkor

$$v(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T},$$

azaz egy hirtelen "gázfröccs" hatására a fordulatszám megugrik, majd exponenciális sebességgel lecseng az alaphelyzetre.

2. eset: legyen $u(t) = \eta(t)$ egységugrás függvény és $v(-0) = 0$ a kezdeti feltétel. Ekkor

$$v(t) = K \left(1 - e^{-t/T}\right),$$

azaz egy hirtelen ugrás után állandósuló gázadás hatására a fordulatszám is idővel állandósul.

Motiváció

- A rendszertechnika, rendszeranalízis alapfeladata: átmeneti folyamatok vizsgálata.
- A megoldás eszköze: differenciálegyenletek és rendszerek megoldása
- Gyakori probléma azonban, hogy az eredeti környezetben (időtartományban) nehezen vagy egyáltalán nem oldhatóak meg ezek az egyenletek, viszont egy alkalmas másik tartományba (pl. a frekvencia-tartományba) áttranszformálva az egyenletet már könnyebb dolgunk lesz.
- Az eszköz tehát az integráltranszformáció alkalmazása.
- Leggyakoribb esetek: Fourier- és Laplace-transzformáció

A transzformáció származtatásáról majd később lesz szó!

Alkalmas függvényosztály

Definíció 3.

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény szakaszonként folytonos* $[a, b]$*-n, ha* $[a, b]$ *felbontható véges sok olyan részintervallumra, melyek belsejében* f *folytonos, a végpontokban pedig* f*-nek véges egyoldali határértéke van.*

Definíció 4.

Az $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *függvény legfeljebb* a*-adrendben exponenciálisan növő, ha létezik olyan* $a \in \mathbb{R}$ *és* $K > 0$*, hogy bármely* $t \geq 0$ *esetén*

$$|f(t)| \leq Ke^{at}$$

Definíció 5 (a-adrendű megengedett függvények osztálya).

Jelölje $\mathcal{M}_a$ *azon* $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *függvények osztályát, melyek bármely* $[0, b]$, $b > 0$ *intervallumon szakaszonként folytonos, legfeljebb* a*-adrendben exponenciálisan növő függvények.*

Definíció 6.

Egy $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *függvény* *Laplace-transzformáltján az*

$$\mathcal{L}(f, s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

függvényt értjük minden olyan $s \in \mathbb{C}$ *esetén, melyre a fenti integrál konvergens.*

s az ún. komplex frekvencia, a transzformáció során pedig az ún. komplex frekvenciatartományba térünk át.

Tétel 9 (Elégséges feltétel a létezésre).

Legyen $f \in \mathcal{M}_a$, $a \in \mathbb{R}$. *Ekkor* f *Laplace-transzformáltja értelmezve van minden olyan* $s \in \mathbb{C}$ *pontban, melyre* $\Re(s) > a$. *Az* $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > a\}$ *félsíkot konvergencia-félsíknak nevezzük.*

Tulajdonságok

Tétel 10 (Linearitás).

Ha $f \in \mathcal{M}_a$, $g \in \mathcal{M}_b$, $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, akkor*

$$\mathcal{L}(f + \lambda g, s) = \mathcal{L}(f, s) + \lambda \mathcal{L}(g, s), \quad \Re(s) > \max\{a, b\}.$$

Tétel 11.

Ha $f \in \mathcal{M}_a$ *olyan, hogy* f *differenciálható és deriváltja folytonos a* $[0, +\infty]$*-en, akkor* $\Re(s) > a$ *esetén*

$$\mathcal{L}(f', s) = s \cdot \mathcal{L}(f, s) - f(0)$$

Tétel 12.

Ha $f \in \mathcal{M}_a$ *olyan, hogy* f n*-szer folytonosan differenciálható a* $[0, +\infty]$*-en, akkor* $\Re(s) > a$ *esetén*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}, s) = s^n \cdot \mathcal{L}(f, s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Tulajdonságok

Tétel 13.

Ha $f \in \mathcal{M}_a$ *folytonos és* $t \geq 0$ *mellett* $g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$*, akkor* $\Re(s) > a$ *esetén*

$$\mathcal{L}(g, s) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}(f, s)$$

Tétel 14.

Ha $f \in \mathcal{M}_a$ *és* $g(t) = t^n \cdot f(t)$*, akkor* $\Re(s) > a$ *esetén*

$$\mathcal{L}(g, s) = (-1)^n \cdot [\mathcal{L}(f, s)]^{(n)}$$

Tulajdonságok

Tétel 15.

1. *Ha* $f \in \mathcal{M}_a$ *és* $g(t) = f(\lambda t)$, $\lambda > 0$, *akkor* $\Re(s) > \lambda a$ *esetén*

$$\mathcal{L}(g, s) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{L}\left(f, \frac{s}{\lambda}\right) \quad \textit{(Hasonlósági tétel)}$$

2. *Ha* $f \in \mathcal{M}_a$ *és* $g(t) = e^{\lambda t} f(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *akkor* $\Re(s) > \lambda + a$ *esetén*

$$\mathcal{L}(g, s) = \mathcal{L}\left(f, s - \lambda\right) \quad \textit{(Eltolási tétel 1.)}$$

3. *Ha* $f \in \mathcal{M}_a$ *és* $g(t) = f(t - \lambda)$, $t > \lambda$, $g(t) = 0$, $t \le \lambda$, $\lambda > 0$, *akkor* $\Re(s) > a$ *esetén*

$$\mathcal{L}(g, s) = e^{-\lambda s} \mathcal{L}\left(f, s\right) \quad \textit{(Eltolási tétel 2.)}$$

Konvolúció

Definíció 7.

Az $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *és* $g : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ *függvények* $f * g$ *konvolúcióján az*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

függvényt értjük minden olyan $t \geq 0$ *pontban, ahol a fenti integrál létezik.*

Kommutatív és asszociatív a művelet.

Tétel 16.

Ha $f \in \mathcal{M}_a$*,* $g \in \mathcal{M}_b$*,* $a, b \in \mathbb{R}$*, akkor* $\Re(s) > \max\{a, b\}$ *esetén*

$$\mathcal{L}(f * g, s) = \mathcal{L}(f, s) \cdot \mathcal{L}(g, s)$$

Ha az időtartományban a konvolúcióval számított válasz

$$y(t) = w(t) * s(t)$$

alakú, akkor a komplex frekvenciatartományba áttérve az

$$Y(s) = W(s)S(s)$$

algebrai egyenletet kapjuk a Laplace-transzformáltakra. Azaz

egy lineáris rendszer átviteli függvénye a kimenet és a bemenet Laplace-transzformáltjainak hányadosa

$$W(S) = \frac{Y(s)}{S(s)}$$

Inverz transzformáció

Tétel 17.

Ha $f \in \mathcal{M}_a$ *folytonos,* $F(s) := \mathcal{L}(f, s)$, *akkor* $t \geq 0$ *esetén*

$$\mathcal{L}^{-1}(F, t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{B \to \infty} \int_{A-Bt}^{A+Bt} F(s) e^{st} \mathrm{d}s$$

ahol $A > a$ *tetszőleges.*

Szimmetrikus improprius komplex vonalintegrál $\Longrightarrow$ gyakorlatban nem használjuk, helyette megpróbáljuk kitalálni a transzformáció tulajdonságai alapján az eredeti függvényt.

Emlékeztető: Fourier-sorfejtés - legyen a $2p$ szerint periodikus f függvény Fourier sora

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{k\pi x}{p} \right)$$

alakú, melyről tudjuk, hogy a függvényt a folytonos időtartományból a diszkrét frekvencia-tartományba viszi.

Cél: ennek kiterjesztése olyan függvényekre, melyek nem periodikusak!

Megoldás: legyen

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Így

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{p} + c_{-k} \cos \frac{k\pi x}{p} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} i \left(c_k \sin \frac{k\pi x}{p} - c_{-k} \sin \frac{k\pi x}{p} \right) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos \frac{k\pi x}{p} + i \sin \frac{k\pi x}{p} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\cos \frac{k\pi x}{p} - i \sin \frac{k\pi x}{p} \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\cos \frac{k\pi x}{p} + i \sin \frac{k\pi x}{p} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi x}{p}}$$

Mindkét oldal exponenciális súlyokkal vett integrálját $-p$ és p véve adódik, hogy

$$\int_{-p}^{p} f(x) e^{-i\frac{m\pi x}{p}} \mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-p}^{p} e^{i\frac{(k-m)\pi x}{p}} \mathrm{d}x.$$

Könnyen látható, hogy a jobb oldali intergál

$$\int_{-p}^{p} e^{i\frac{(k-m)\pi x}{p}} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq m \\ 2p & \text{ha } k = m, \end{cases}$$

így

$$c_k = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(\xi) e^{-i\frac{k\pi\xi}{p}} \mathrm{d}\xi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Származtatás

Tehát

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(\xi) e^{-i\frac{k\pi(\xi-x)}{p}} \mathrm{d}\xi.$$

Tegyük fel most, hogy $p \to \infty$, és a nemperiodikus f függvényünk olyan, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-iy(\xi-x)} \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-iy\xi} \,\mathrm{d}\xi}_{g(y)} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} \,\mathrm{d}y$$

Származtatás

Adott f függvényhez a megfelelő g függvényt az ún. Fourier-transzformáció rendeli hozzá, azaz

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x = g(y)$$

és

$$\mathcal{F}^{-1}(g(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} \, \mathrm{d}y = f(x).$$

Alkalmazás: átviteli karakterisztika meghatározása tetszőleges gerjesztés és arra adott válasz alapján (pl. távközlési rendszerekben, stb...)

Származtatás

Gond: szűk azoknak a függvényeknek az osztálya, melyek abszolút integrálhatóak, azaz melyekre a Fourier-transzformáció értelmezhető. (Egységugrás gerjesztés például nem Fourier- transzformálható.)

Cél: az alkalmas függvényosztály bővítése a transzformáció módosításával

Eszköz: Laplace-transzformáció, mely során exponenciális súlyozással biztosítjuk az abszolút integrálhatóságot. Most viszont csak olyan esetekkel foglalkozunk, melyeknél a rendszer bemenetére a $t = 0$ időpillanatban egy olyan gerjesztést kapcsolunk, melynek értéke $t < 0$ estén nulla. Azaz a gerjesztés belépő, így a kauzalitás miatt a válaszjel is belépő lesz. Ezen válaszjel kiszámítására alkalmas a Laplace-transzformáció.

Származtatás

Legyen tehát a választott függvényünk

$$e^{-xt} \cdot f(t), \quad x > 0$$

alakú, ahol t a változó, $x > 0$ pedig tetszőleges, szabad paraméter. Tegyük fel továbbá, hogy $f(t) \equiv 0$, ha $t < 0$. Ekkor

$$\mathcal{F}(y, x) = \int_0^\infty e^{-iyt} e^{-xt} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Tegyük fel most, hogy $f \in \mathcal{M}_a$. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+iy)t} g(y, x) \, \mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ f(t) & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

Származtatás

Jelölje $s := x + iy$: Ekkor $g(y, x) = g(s)$, továbbá

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} g(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ f(t) & \text{ha } t > 0, \end{cases}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-ts} f(t)\,\mathrm{d}t = g(s), \quad \Re(s) > x_0 > 0.$$

Ha ez az utóbbi integrál konvergens, akkor a $g(s)$ függvényt az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltjának nevezzük.