Lineáris terek

Matematika M1 gépészmérnököknek

2017. február 27.
2017. március 6.

LINEÁRIS TEREK

Vektortér fogalma

Definíció 1.

Legyen K valós vagy komplex számtest. A V halmazt a K **számtest feletti vektortér***nek nevezzük, ha*

(i) $\forall v_1, v_2 \in V$ *esetén* $v_1 + v_2 \in V$

(ii) *az összeadás kommutatív, azaz* $\forall v_1, v_2 \in V$ *esetén* $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

(iii) *az összeadás asszociatív, azaz* $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ *esetén* $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

(iv) *létezik nullelem, azaz* $\exists 0 \in V$ *olyan, hogy* $v + 0 = v$ *bármely* $v \in V$ *esetén*

(v) *létezik ellentett elem, azaz* $\exists(-v) \in V$ *olyan, hogy* $v + (-v) = 0$ *bármely* $v \in V$ *esetén*

(vi) $\forall v \in V$ *és* $c \in K$ *esetén* $c \cdot v \in V$

(vii) *a skalárral való szorzás kommutatív és asszociatív, disztributív az összeadásra nézve, valamint létezik egységeleme*

Példák: (konkrét indoklások a gyakorlatokon)

- $\mathbb{R}^n$
- valós együtthatós polinomok
- konvergens valós számsorozatok
- folytonos függvények
- differenciálható függvények

Definíció 2.

Egy V vektortér U részhalmazát a V egy **alterének** *nevezzük, ha U vektorteret alkot a V-ben értelmezett műveletekre nézve. Azaz $\forall u_1, u_2 \in U$ és $\forall c_1, c_2 \in K$ esetén $c_1 u_1 + c_2 u_2 \in U$.*

Röviden: az összeadás és a skalárral való szorzás nem vezet ki a halmazból.

Definíció 3.

A $v_1, \ldots, v_n \in V$ *vektorok* **lineárisan összefüggőek**, *ha létezik* $c_1, \ldots, c_n \in K$, *nem mind nulla olyanok, hogy* $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$. *Ha a fenti összefüggés csak úgy teljesül, hogy* $c_i = 0, i = 1, \ldots, n$, *akkor a vektorrendszert* **lineárisan független rendszer***nek nevezzük.*

Vektorok lineáris kombinációja mindig alteret generál a vektortérben. Azaz az adott vektortérben a maximális elemszámú, lineárisan független rendszer speciális szerepet játszik.

Definíció 4.

A $b_1, \ldots, b_n \in V$ *vektorrendszert a vektortér* **bázis***ának nevezzük, ha a vektorrendszer lineárisan független, és* V *minden vektora előáll ezek lineáris kombinációjaként. Egy bázis elemeinek számát a vektortér* **dimenzió***jának nevezzük.*

Bázistranszformáció, lineáris leképezés

Tétel 1.

Legyen a V vektortér két bázisa $B: b_1, \ldots, b_n$ és $C: c_1, \ldots, c_n$. Ekkor tetszőleges $v \in V$ esetén

$$v_C = B \cdot v_B \quad \text{és} \quad v_B = C \cdot v_C,$$

ahol B és C a megfelelő bázisvektorok alkotta $n \times n$-es mátrixok. Világos, hogy ekkor $B = C^{-1}$.

Fontosak számunkra azok a leképezések, melyek két vektortér elemeit feleltetik meg egymásnak a lineáris kombináció segítségével.

Definíció 5.

Legyenek U és V azonos számtest feletti vektorterek. Azt a T leképezést, mely $\forall u \in U$ vektorhoz hozzárendel egy $Tu \in V$ vektort úgy, hogy $T(u_1 + u_2) = Tu_1 + Tu_2$ és $T(cu) = c(Tu)$, $\forall\, c \in K$ és $u, u_1, u_2 \in U$ esetén, **lineáris operátor***nak (leképezés) nevezzük.*

Tétel 2.

Ha $T : U \to V$ *lineáris operátor,* U *bázisa* $B_e : e_1, \ldots, e_n$ *és* V *bázisa* $B_f : f_1, \ldots, f_r$*, akkor a rögzített bázispárban a* T *operátorhoz egyértelműen tartozik egy* $T = [t_{ij}]$*,* $i = 1, \ldots, r$*,* $j = 1, \ldots, n$ *mátrix olyan, melynek oszlopaiban a* Te_i *képvektorok* B_f *bázisbeli oszlopvektorai állnak. Ekkor* $Tu = v$*.*

FONTOS: lineáris operátor mátrixának alakja mindig függ a bázis megválasztásától!

Tétel 3 (speciális eset).

Legyen $T : U \to U$ *lineáris operátor, és legyen* U *két bázisa* $B : b_1, \ldots, b_n$ *és* $C : c_1, \ldots, c_n$*. Ekkor*

$$T_C = C^{-1} \cdot T_B \cdot C.$$

EUKLIDESZI TEREK

Definíció 6.

A V *vektortérben* **skaláris szorzat** *értelmezett, ha* V *minden* v_1, v_2 *párjához egyértelműen hozzárendelt egy olyan* $\langle v_1, v_2 \rangle$ *skalár, melyre*

(i) $\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$

(ii) $\langle cv_1, v_2 \rangle = c\langle v_1, v_2 \rangle$

(iii) $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$

(iv) $\langle v, v \rangle \geq 0$ *és* $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0.$

Példák:

- $\mathbb{R}^n$, $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$
- $\mathbb{C}^n$, $\langle v, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{z_i}$
- $C_{[0,1]}$ összeadás és skalárral való szorzás műveletével,

  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

Ha egy vektortérben skaláris szorzás értelmezett, akkor a vektorteret Euklideszi térnek nevezzük.

Definíció 7.

A V vektortérben **norma** *értelmezett, ha V minden v eleméhez egyértelműen hozzárendelt egy olyan $\|v\|$ skalár, melyre*

(i) $\|v\| \geq 0$ *és* $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \ \forall v_1, v_2 \in V$

(iii) $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\| \ \forall v \in V, c \in \mathbb{R}$.

Példák:

- $\mathbb{R}^n$, $\|v\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |v_i|$, vagy $\|v\| = \sum_{i=1}^n |v_i|$
- $C_{[a,b]}$, $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Ha egy vektortérben norma értelmezett, akkor a vektorteret normált térnek nevezzük.

Az Euklideszi és normált terek közti kapcsolatot az alábbi tétel segítségével fogalmazhatjuk meg.

Tétel 4.

Az E Euklideszi térben $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$ mindig normát határoz meg.

Példák:

- $C_{[0,1]}$: $\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

A tétel bizonyításának alapja a következő egyenlőtlenség:

Tétel 5 (Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség).

Legyen E Euklideszi tér. Ha $v_1, v_2 \in E$, akkor

$$|\langle v_1, v_2\rangle|^2 \leq \langle v_1, v_1\rangle \cdot \langle v_2, v_2\rangle$$

APPROXIMÁCIÓ-ELMÉLET

Alapötlet

Gyakorlati alkalmazások alapvető eszköze közelítő analitikus megoldás keresésére.

Ötlet: az adott $f(x)$ függvényt közelítőleg előállító $\phi(x)$ approximáló (közelítő) függvényt rendszerint valamilyen $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$ függvényrendszer függvényeinek

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

alakú lineáris kombinációjaként keressük.

Láttunk ilyet már korábban, ld. hatványsorok véges szeletei, Taylor-polinom, Fourier-sor megfelelő szelete, stb...

Mindennek az alapja a fenti függvényrendszer ügyes megválasztása!

Definíció 8.

Az $[a, b]$ *intervallumon értelmezett valós értékű* $f(x)$ *függvényt* **négyzetesen integrálható***nak nevezzük, ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \quad \textit{és} \quad \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

A négyzetesen integrálható függvények halmazát $L^2(a, b)$ *térnek nevezzük.*

Tétel 6.

Ha $f, g \in L^2(a, b)$, *akkor szorzatuk integrálható függvény lesz.*

Négyzetesen integrálható függvények osztálya

Következmény 1.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

skaláris szorzatot definiál, tehát $f \in L^2(a,b)$ *esetén*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

norma.

Következmény 2 (Minkowski egyenlőtlenség).

Ha $f, g \in L^2(a,b)$, *akkor* $f+g \in L^2(a,b)$, *és*

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

Legkisebb négyzetek feladat

Tegyük fel, hogy adott m darab $\{t_i, f_i\}$ pár a síkon, ahol t_i a kísérletek időpontjait, f_i pedig a t_i időpontban mért értéket jelöli.

Feladat: t és f közötti kapcsolat meghatározása valamilyen elegendően sima $F(t)$ görbe segítségével. Azaz a cél az

$$F(t_i) \approx f_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

elérése a lehető legkisebb hibával, és olyan F függvénnyel, mely algebrailag jól kezelhető.

Megoldás: legkisebb négyzetek módszere. Legyen

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(t)$$

alakú, ahol $m \gg n$, x_j, $j = 1, \ldots, n$ a keresett paraméterek, φ_j, $j = 1, \ldots, n$ pedig egy alkalmas függvényrendszer.

Legyen

- $A = (a_{ij}) = (\varphi_j(t_i)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $f = (f_i, \ldots, f_m)^T$
- $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Ekkor könnyen látható, hogy

$$F(t_i) = (Ax)_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

azaz a megoldandó feladat az

$$Ax = f$$

túlhatározott egyenletrendszer megoldásának megkeresése!

A gond csak az, hogy ez általában nem oldható meg!

Legkisebb négyzetek feladat

Tehát nem a fenti feladatot fogjuk megoldani, hanem annak **egy jó közelítését keressük** úgy, hogy a hibát próbáljuk meg minimalizálni. Azaz a feladat:

$$J(x) := \|Ax - f\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(t_i) - f_i \right)^2 \to \min_x!$$

Megoldás: többváltozós valós függvény minimumát kell megkeresnünk, tehát deriválunk. A megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial J}{\partial x_k} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(t_i) - f_i \right) \varphi_k(t_i) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Legkisebb négyzetek feladat

Itt

$$\sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_k(t_i) = (A^T f)_k,$$

hiszen A^T k-dik sora éppen a $\varphi_k(t_1), \ldots, \varphi_k(t_m)$ értékekből áll. Másrészt

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_j(t_i)\varphi_k(t_i) = (A^T A)_{kj},$$

így

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(t_i)\varphi_k(t_i) = \sum_{j=1}^{n} (A^T A)_{kj} x_j = (A^T A x)_k.$$

Tehát a keresett minimum csak ott lehet, ahol teljesül az

$$A^T A x = A^T f$$

összefüggés. Ezt a lineáris, $n \times n$ méretű egyenletrendszert **Gauss-féle normálegyenlet**nek nevezzük.

Legkisebb négyzetek feladat folytonos időben

Gyakran fordul elő az az eset, amikor a közelítés jóságát mérő $J(x)$ **függvényt nem véges számú diszkrét pontban definiáljuk, hanem valamely adott, véges $[a, b]$ intervallumban**. Ekkor a feladat is módosulni fog az alábbi formában: legyen az approximálandó f függvény olyan, melyre $f \in L^2(a, b)$. Legyen továbbá a φ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ függvényrendszer olyan, melyre $\varphi_k \in L^2(a, b)$, és legyen

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \varphi_k(x).$$

Ekkor a feladat:

$$J(c) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \varphi_k(x) \right)^2 \mathrm{d}x = \|f - \phi_n\|^2 \to \min_c!$$

Azaz skaláris szorzatot változtattunk a téren, ahol f általában szakaszonként folytonos függvény lesz.

Legkisebb négyzetek feladat folytonos időben

A megoldás menete hasonló az előzőhöz: parciális deriváltakat számoluk, és ebből felírjuk a normálegyenleteket:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tehát az adódó egyenletrendszer alakja:

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & \ldots & \langle\varphi_0,\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \ldots & \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle\varphi_n,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle & \ldots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f,\varphi_0\rangle \\ \langle f,\varphi_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f,\varphi_n\rangle \end{pmatrix}$$

A rendszer mátrixát **Gram-féle mátrix**nak nevezik.

Kérdés: mikor oldható meg biztosan ez az egyenletrendszer?

Válasz: akkor, ha a Gram-mátrix nem-szinguláris, azaz létezik inverze. Ehhez pedig az kell, hogy a $\{\varphi_k\}$ függvényrendszer

lineárisan független rendszer

legyen! A megoldás tovább egyszerűsíthető akkor, ha olyan függvényrendszert választunk, mely

ortogonális rendszer

is egyben.

Definíció 9.

Legyen $v_1, v_2 \in E$, $v_1 \neq v_2$. *A* **két vektor hajlásszögén** *a*

$$\varphi = \arccos \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

szöget értjük.

Definíció 10.

A $v_1, v_2 \in E$ *vektorokat* **ortogonális***nak nevezzük, ha* $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Definíció 11.

Az E *Euklideszi tér* $v_1, \ldots, v_k$ *rendszerét* **ortogonális rendszer***nek nevezzük, ha* $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ *és* $i \neq j$ *esetén* $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. *Ha továbbá* $\|v_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, k$, *akkor a rendszer* **ortonormált**.

Ortogonális függvényrendszerek

Tétel 7.

Ha $v_1, \ldots, v_k \in E$ *ortogonális rendszer és* $v_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, *akkor a vektorrendszer lineárisan független rendszer.*

Azaz Euklideszi tér bármely n elemű ortogonális rendszere választható bázisnak. Ha a rendszer ortonormált, akkor ortonormált bázisról beszélünk.

Tétel 8.

Ha $B : e_1, \ldots, e_n$ *az* E *Euklideszi tér egy ortonormált bázisa, akkor tetszőleges* $x \in E$ *vektor* B *bázisbeli koordinátái az*

$$x_i = \langle x, e_i \rangle, \quad i = 1, \ldots, n$$

skaláris szorzattal számolhatóak.

Ortogonális függvényrendszerek

Kérdés: van-e minden Euklideszi térnek ortogonális bázisa?

Válasz: igen, mert bármely bázisból ortogonális bázis készíthető a következő, ún. **Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás**sal: legyen $b_1, \ldots, b_n$ lineárisan független rendszer. Ebből egy olyan $c_1, \ldots, c_n$ rendszert szeretnénk konstruálni, mely már ortogonális. Az algoritmus a következő:

- $c_1 = b_1$;
- $c_2 = b_2 + a_{12} \cdot c_1$, ahol az a_{12} konstanst úgy választjuk, hogy $\langle c_2, c_1 \rangle = 0$ teljesüljön;
- $c_k = b_k + a_{1k} \cdot c_1 + a_{2k} \cdot c_2 + \ldots + a_{k-1,k} \cdot c_{k-1}$, ahol a_{ik} olyan, melyre $\langle c_k, c_i \rangle = 0$ teljesül minden $i = 1, \ldots, k-1$ esetén.

Megmutatható, hogy

$$a_{ik} = -\frac{\langle b_k, c_i \rangle}{\langle c_i, c_i \rangle} \quad i = 1, \ldots, k-1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Tegyük fel, hogy a legkisebb négyzetek feladatban definiált $\{\varphi_k\}$ rendszer ortonormált rendszer, $\varphi_k \in L^2(a,b)$, $k = 1, \ldots, n$ és $f \in L^2(a,b)$. Ekkor

$$\|f - \phi_n\|^2 \to \min_{c_k}! \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\langle f, \varphi_k\rangle - c_k\right)^2 = 0,$$

azaz $c_k = \langle f, \varphi_k\rangle$.

Definíció 12.

A fenti c_k együtthatókat **az f függvény általánosított Fourier-együtthatói***nak nevezzük.*

Speciálisan a Gram-mátrix diagonális lesz, $\|\varphi_i\|^2$ értékekkel a diagonálisban.

PÉLDA 1.

Tekintsük az alábbi adatokat:

t_i	0	1	1	2
f_i	4	3	2	0

Keresendő $F(t) = a + bt$ alakú, legkisebb értelemben legjobban közelítő egyenes az adatokhoz!

PÉLDA 1.

Tekintsük az alábbi adatokat:

t_i	0	1	1	2
f_i	4	3	2	0

Keresendő $F(t) = a + bt$ alakú, legkisebb értelemben legjobban közelítő egyenes az adatokhoz!

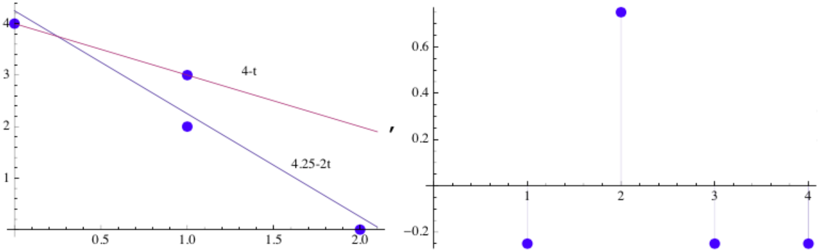


Figure : Az illesztett egyenesek és a reziduálisok

PÉLDA 2.

Tekintsük az alábbi adatokat:

t_i	0	1	2	3	4	5	7	8	10
f_i	10	8.5	7.5	8	9	8.25	6	3.75	0

Keresendő $F(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \ldots + a_n t^n$ alakú, legkisebb értelemben legjobban közelítő polinom az adatokhoz! Mennyi lesz az illeszthető polinom maximális foka?

PÉLDA 2.

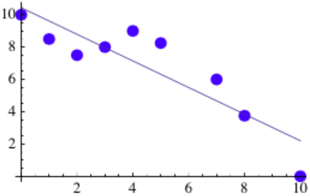
```
data = {{0, 10}, {1, 8.5}, {2, 7.5},
   {3, 8}, {4, 9}, {5, 8.25}, {7, 6}, {8, 3.75}, {10, 0}};
line = Fit[data, {1, x}, x]
```

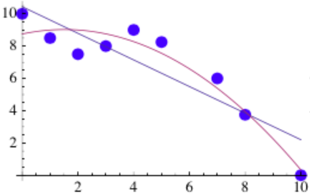
$10.4409 - 0.8242\,x$

```
parabola = Fit[data, {1, x, x^2}, x]
```

$8.75004 + 0.364863\,x - 0.12069\,x^2$

```
{Show[ListPlot[data, PlotStyle → Directive[PointSize[Large], Blue]],
  Plot[{line}, {x, 0, 10}]],
 Show[ListPlot[data, PlotStyle → Directive[PointSize[Large], Blue]],
  Plot[{line, parabola}, {x, 0, 10}]]}
```





PÉLDA 2.

```
cube = Fit[data, {1, x, x^2, x^3}, x]
```

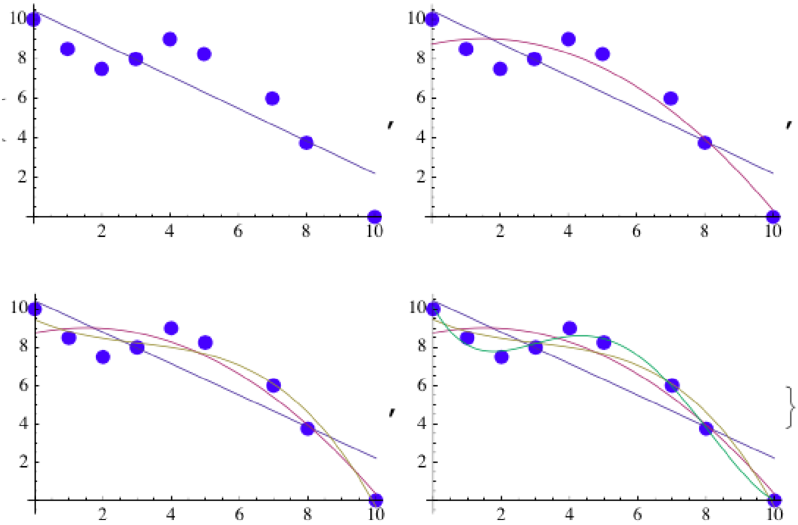
$9.45953 - 0.794552\,x + 0.191799\,x^2 - 0.0210365\,x^3$

```
quad = Fit[data, {1, x, x^2, x^3, x^4}, x]
```

$10.11 - 3.18791\,x + 1.41738\,x^2 - 0.218593\,x^3 + 0.00986159\,x^4$

```
{Show[ListPlot[data, PlotStyle → Directive[PointSize[Large], Blue]],
   Plot[{line}, {x, 0, 10}]],
 Show[ListPlot[data, PlotStyle → Directive[PointSize[Large], Blue]],
   Plot[{line, parabola}, {x, 0, 10}]],
 Show[ListPlot[data, PlotStyle → Directive[PointSize[Large], Blue]],
   Plot[{line, parabola, cube}, {x, 0, 10}]],
 Show[ListPlot[data, PlotStyle → Directive[PointSize[Large], Blue]],
   Plot[{line, parabola, cube, quad}, {x, 0, 10}]]}
```

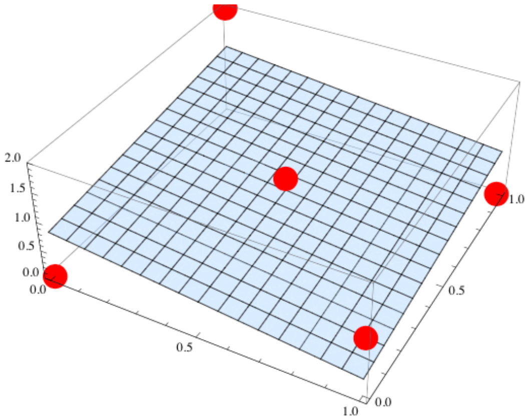
PÉLDA 2.



PÉLDA 3.

```
data3d = {{0, 0, 0}, {1, 0, 1}, {0, 1, 2}, {1, 1, 0}, {1 / 2, 1 / 2, 1}};
plane = Fit[data3d, {1, x, y}, {x, y}]
0.8 - 0.5 x + 0.5 y
```

```
Show[Plot3D[plane, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, PlotStyle → Opacity[.5],
  PlotRange → {0, 2}], Graphics3D[{Red, PointSize[0.05], Map[Point, data3d]}]]
```

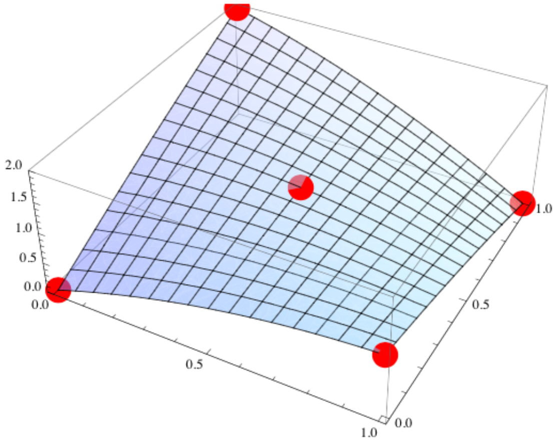


PÉLDA 3.

```
quad = Fit[data3d, {1, x, y, x^2, x y, y^2}, {x, y}]
```

$2.73158\times 10^{-16} + 1.76087\, x - 0.76087\, x^2 + 2.23913\, y - 3.\, x\, y - 0.23913\, y^2$

```
Show[Plot3D[quad, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, PlotStyle → Opacity[.5],
  PlotRange → {0, 2}], Graphics3D[{Red, PointSize[0.05], Map[Point, data3d]}]]
```



PÉLDA 4.

Kenőanyag viszkozitását szeretnénk modellezni adatok és adott modellforma segítségével.

A modell a következő: ha x_1 jelöli a hőmérsékletet, x_2 pedig a nyomást (1000-rel normálva a könnyebb számíthatóság kedvéért), akkor a viszkozitást a

$$\frac{\theta_1}{\theta_2 + x_1} + \theta_3 x_2 + \theta_4 x_2^2 + \theta_5 x_2^3 + (\theta_6 + \theta_7 x_2^2) x_2 e^{\frac{-x_1}{\theta_8 + \theta_9 x_2^2}}$$

formula írja le. Becsüljük meg az adatok segítségével a fenti formula 9 paraméterét!

```
fit = FindFit[sdata, model, {θ1, θ2, θ3, θ4, θ5, θ6, θ7, θ8, θ9}, {x1, x2}]
{θ1 → 1054.86, θ2 → 206.611, θ3 → 1.45998, θ4 → -0.259549,
 θ5 → 0.0225532, θ6 → 0.401797, θ7 → 0.0352675, θ8 → 57.4343, θ9 → -0.475994}
```

PÉLDA 4.

```
Show[{Plot3D[Evaluate[model /. fit], {x₁, 0, 100}, {x₂, 0, 8}],
  Graphics3D[{Red, PointSize[.025], Map[Point, sdata]}]}]
```