Bevezetés, tudnivalók
Komplex függvénytan

Matematika M1 gépészmérnököknek

2017. február 6.
2017. február 13.
2017. február 20.

Adminisztratív ügyek

Honlap: www.math.bme.hu/∼ftamas

Jegyzet: Garay Barna, Bálint Péter, Kiss Márton, Lóczi Lajos, Nagy Katalin, Nágel Árpád: Gépészkari matematika MSc

További ajánlott irodalom:

- Vetier András: Szemléletes mérték- és valószínűségelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, 1972.
- Dux Erik: Komplex függvények, Műegyetemi Kiadó, 2001.
- Tóth János, Simon Péter: Differenciálegyenletek, Typotex, 2004.

Jelenléti követelmények

- Az előadás látogatása nem kötelező, de ajánlott.
- A **gyakorlatok látogatása kötelező**, jelenlét ellenőrzés mindig lesz. Legfeljebb a gyakorlatok 30%-áról lehet hiányozni, mely esetünkben 3 alkalmat jelent a félév során.
- Minden jelenlét és eredmény közzé lesz téve a honlapon.
- A **gyakorlatok közt nincs "vándorlás"** a termek befogadóképességének végessége, valamint a röpzh-k normális lebonyolításának érdekében.
- Azaz gyakorlati csoport váltás csak cserével lehetséges! Erről minden esetben tájékoztassák mindkét gyakorlati csoport vezetőjét!

Számonkérések

A tárgy **félévközi jegyes**. A félévközi jegy a szorgalmi időszakban megtartott számonkérések eredményéből alakul ki.

Röpzárthelyik

- **kéthetente a gyakorlatok elején, kb. 10 perc időtartamban**. Anyaga mindig az előző röpzárthelyi óta kiadott elméleti és gyakorlati anyag. Ezek mindig megtalálhatóak lesznek a honlapon.
- **7 db röpzárthelyi lesz összesen**, ebből az 5 legjobb eredményét vesszük figyelembe. Emiatt - a TVSz-nek megfelelően - nincs pótlási vagy javítási lehetőség.
- Minden röpzh egy elméleti és egy gyakorlati kérdésből áll, összesen 5 pontért.

Zárthelyik

- Terv szerint a **7. és a 14. héten** írjuk a nagy-zárthelyiket, **külön időpontban** (zh-sáv), melyeken csak feladatmegoldás szerepel majd. Helyszínek még függőben.
- Mindkét zárthelyin külön-külön el kell érni a **40%-os minimum-szint**et a legalább elégséges félévközi jegy megszerzéséhez.
- Javítás és pótlás - a TVSz-nek megfelelően - várhatóan a 15., illetve a pótlási héten lesz.

Osztályozás: A zárthelyik eredményéből százalékátlagot számolunk az

$$SZ = \frac{100 \cdot (rzh/25 + zh1/50 + zh2/50)}{3}$$

képlettel, utána a jegy kialakítása már a szokásos módon történik.

Egyebek, tematika

- A félév során várhatóan lesznek **beadható szorgalmi házi feladatok** is, ezekről időben tájékoztatok majd mindenkit. Pontszámuk sikeres nagy-zh eredményhez adódik majd hozzá.
- A fentiekkel kapcsolatban minden további részlet megtalálható a tárgykövetelményekben a honlapon.

Tematika

- Komplex függvénytan
- Approximáció-elmélet
- Laplace transzformáció és alkalmazása
- Valószínűségszámítás

Az előadások és gyakorlatok tematikájának heti bontása megtalálható a honlapon.

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Előzmények: komplex számok, számsík - ezekről tanultunk korábban, most ezt fogjuk kibővíteni, folytatni.

Definíció 1.

Az M halmazt **komplex elemű halmaz***nak nevezzük, ha elemei komplex számok, azaz ha $z \in M$, akkor $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, i pedig a képzetes egység.*

Definíció 2.

Egy függvényt akkor nevezzünk **komplex változós függvény***nek, ha mind az értelmezési tartománya, mind pedig az értékkészlete komplex elemű halmaz. Jelölés: $w = f(z)$, ahol $z, w \in \mathbb{C}$.*

Ha $z = x + iy$ és $w = u + iv$ alakú, akkor könnyen látható, hogy

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

alakban írható, amit a komplex függvény ún. **kanonikus alak**jának nevezünk.

Azaz minden komplex függvény ekvivalens egy $(u(x, y), v(x, y))$*, kétváltozós valós függvényekből álló függvényrendszerrel.*

Például:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{2xy}_{v(x,y)} .$$

Környezet, torlódási pont

Definíció 3.

A z_0 *komplex szám* $\rho > 0$ *sugarú* $K_{z_0,\rho}$ **környezet***e mindazon* z *komplex számok halmaza, melyek* z_0*-tól való távolsága* ρ*-nál kisebb, azaz*

$$K_{z_0,\rho} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}.$$

Definíció 4.

A z_0 *komplex számot az* M *halmaz* **torlódási pont***jának nevezzük, ha bármely* $\rho > 0$ *esetén a* $K_{z_0,\rho}$ *környezet az* M *halmaz végtelen sok elemét tartalmazza.*

Határérték

Definíció 5.

Legyen z_0 *az* $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ *komplex függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Ekkor*

$$\lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{z_0}} \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{H},$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\rho(\varepsilon) > 0$, *hogy bármely* $z \in (K_{z_0,\rho(\varepsilon)} \setminus \{z_0\}) \cap D$ *esetén* $|f(z) - H| < \varepsilon$.

Minden olyan állítás, ami igaz volt valósban, igaz lesz most is, azaz kimondható a Cauchy-kritérium és érvényben van a műveletek tétel is, kiegészítve a konjugáltra vonatkozó állítással, miszerint ha

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = H, \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{H}.$$

Tétel 1.

Egy

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

komplex függvénynek a $z_0 = x_0 + iy_0$ *helyen* **akkor és csak akkor** *létezik határértéke, ha az* $u = u(x,y)$ *és* $v = v(x,y)$ *függvényeknek véges határértéke van az* (x_0, y_0) *helyen, azaz*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = U \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = V.$$

Ekkor az is igaz, hogy

$$\Re(\lim_{z\to z_0} f(z)) = U \quad \text{és} \quad \Im(\lim_{z\to z_0} f(z)) = V.$$

Definíció 6.

Az $f(z)$ **komplex függvény a z_0 helyen folytonos**, *ha ott értelmezve van, $z \to z_0$ mellett van véges határértéke, és ez megegyezik a függvény z_0-beli helyettesítési értékével. Azaz*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ha f folytonos egy halmaz minden pontjában, akkor folytonos a halmazon.

A műveletek tétel itt is érvényben marad, kiegészítve a konjugáltra vonatkozó állítással.

Tétel 2.

Az f komplex függvény **pontosan akkor** *folytonos z_0-ban, ha az u és v függvények folytonosak (x_0, y_0)-ban.*

Definíció 7.

Az $f(z)$ **komplex függvény a** z_0 **helyen differenciálható**, *ha az*

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték létezik.

A differenciálhatóság most is maga után vonja a folytonosságot, de fordítva ez nem igaz.

Definíció 8.

Ha f *differenciálható egy* M *halmaz minden pontjában, akkor* f *differenciálható a halmazon. Ekkor* f **reguláris, analitikus, avagy holomorf** *a halmazon.*

A differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjai érvényben maradnak.

Kérdés: mi a kapcsolat f differenciálhatósága, valamint az u és v függvények között?

Tétel 3.

Ha f differenciálható z_0-ban, akkor az u és v függvények parciálisan differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban, továbbá érvényesek az

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$$
$$-u'_y(x_0, y_0) = v'_x(x_0, y_0)$$

Cauchy-Riemann egyenletek.

Azaz **szükséges feltétel**t kaptunk f z_0-beli differenciálhatóságára, azonban a feltétel ebben a formában még nem elégséges!

Differenciálhatóság

A differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjai érvényben maradnak.

Kérdés: mi a kapcsolat f differenciálhatósága, valamint az u és v függvények között?

Tétel 3.

Ha f differenciálható z_0-ban, akkor az u és v függvények parciálisan differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban, továbbá érvényesek az

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$$
$$-u'_y(x_0, y_0) = v'_x(x_0, y_0)$$

Cauchy-Riemann egyenletek.

Azaz **szükséges feltétel**t kaptunk f z_0-beli differenciálhatóságára, azonban a feltétel ebben a formában még nem elégséges!

Differenciálhatóság

A differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjai érvényben maradnak.

Kérdés: mi a kapcsolat f differenciálhatósága, valamint az u és v függvények között?

Tétel 3.

Ha f differenciálható z_0-ban, akkor az u és v függvények parciálisan differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban, továbbá érvényesek az

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$$
$$-u'_y(x_0, y_0) = v'_x(x_0, y_0)$$

Cauchy-Riemann egyenletek.

Azaz **szükséges feltétel**t kaptunk f z_0-beli differenciálhatóságára, azonban a feltétel ebben a formában még nem elégséges!

Tétel 4.

Az f függvény **pontosan akkor** *differenciálható z_0-ban, ha az u és v függvények totálisan differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban, továbbá teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek. Ekkor*

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y).$$

Emlékezzünk arra, hogy ha a parciális deriváltak léteznek és folytonosak, akkor függvényünk totálisan differenciálható is.

A magasabbrendű deriváltak fogalma analóg a valósban látottakkal.

Definíció 9.

Egy kétszer folytonosan diffható $g(x,y)$ függvényt **harmonikus függvény***nek nevezünk, ha kielégíti a Laplace egyenletet, azaz*

$$\Delta g = g''_{xx}(x,y) + g''_{yy}(x,y) = 0$$

minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

A következő állítás a Cauchy-Riemann egyenletek közvetlen következménye.

Tétel 5.

Ha az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex függvény az M halmazon legalább kétszer folytonosan differenciálható, akkor u és v harmonikus függvények.

Definíció 10.

Az u és v kétváltozós valós függvényeket egymás **harmonikus társ***ainak nevezzük, ha létezik olyan $f(z)$ analitikus függvény, melyre $\Re(f(z)) = u(x, y)$ és $\Im(f(z)) = v(x, y)$.*

Egyszeresen összefüggő T tartományban a reguláris (analitikus) komplex függvények, valamint a divergencia- és rotációmentes síkbeli vektorfüggvények bizonyos vonatkozásban azonos tulajdonságokkal rendelkeznek.

Ez a tulajdonság pedig nem más, mint a **komplex potenciál** fogalma.

Definíció 11.

Legyen a $\underline{p}(x,y) = p_1(x,y)\underline{i} + p_2(x,y)\underline{j}$ *síkbeli vektormező az egyszeresen összefüggő* D *tartományon folytonosan differenciálható. Az* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *kétszer folytonosan differenciálható komplex függvényt a* D *tartományon a* $\underline{p}$ *vektormező* **komplex potenciál***jának nevezzük, ha bármely* $(x,y) \in D$ *esetén*

$$\operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \underline{\mathbf{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

vagyis

$$u'_x(x,y) = p_1(x,y), \quad u'_y(x,y) = p_2(x,y),$$

azaz

$$\underline{p}(x,y) = u'_x(x,y)\underline{i} + u'_y(x,y)\underline{j}.$$

Tétel 6.

Komplex potenciállal rendelkező $\underline{p}$ síkbeli vektormező **örvény- és forrásmentes**, *azaz rotációja és divergenciája egyaránt zérus.*

- $u(x, y) = c$: ekvipotenciális vonalak
- $v(x, y) = k$: erő- (vagy áram-) vonalak

Például, ha $\underline{p}$ egy síkbeli áramlás sebességvektora, akkor $u(x, y)$ a sebességpotenciál, $v(x, y)$ pedig az áramfüggvény.

Alkalmazás:

- összenyomhatatlan közeg síkáramlásának leírására;
- egyszerűen előállíthatóak és szuperpozícióval kombinálhatóak olyan áramképek, mint a párhuzamos áramlás, potenciálos örvény, a forrás és nyelő, dipólus, vagy a sarok körüli áramlás.

Dipólus, örvény és párhuzamos áramlás szuperpozíciója

Helyezzünk el a komplex számsík origójába egy $\nu = 1$ erősségű dipólust és egy $\Gamma = 1$ erősségű örvényt, és szuperponáljunk ezekre egy $V = 1$ sebességű párhuzamos áramlást. Mi lesz az áramfüggvény az origó körüli egységkörön?

Megoldás: Az eredő komplex potenciál

$$f(z) = w = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{dipólus}} + \underbrace{\frac{i \log z}{2\pi}}_{\text{örvény}} + \underbrace{e^{i\phi} z|_{\phi=0}}_{\text{párhuzamos áramlás}}$$

Ekkor

$$f'(z) = \frac{-1}{z^2} + \frac{i}{2\pi z} + 1$$

Dipólus, örvény és párhuzamos áramlás szuperpozíciója

Helyezzünk el a komplex számsík origójába egy $\nu = 1$ erősségű dipólust és egy $\Gamma = 1$ erősségű örvényt, és szuperponáljunk ezekre egy $V = 1$ sebességű párhuzamos áramlást. Mi lesz az áramfüggvény az origó körüli egységkörön?

Megoldás: Az eredő komplex potenciál

$$f(z) = w = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{dipólus}} + \underbrace{\frac{i \log z}{2\pi}}_{\text{örvény}} + \underbrace{e^{i\phi} z|_{\phi=0}}_{\text{párhuzamos áramlás}}$$

Ekkor

$$f'(z) = \frac{-1}{z^2} + \frac{i}{2\pi z} + 1$$

A Cauchy-Riemann egyenletek alapján tehát azt kapjuk, hogy

$$f'(z) = \frac{-1}{z^2} + \frac{i}{2\pi z} + 1 = v'_y(x, y) + iv'_x(x, y),$$

azaz

$$v'_y(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{2\pi(x^2 + y^2)} + 1$$

$$v'_x(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{2\pi(x^2 + y^2)}.$$

Tehát az áramfüggvény

$$v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{\log\sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi} + y$$

Ha az origó körüli egységkörön vagyunk, akkor

$$x = \cos\phi \quad \text{és} \quad y = \sin\phi, \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

tehát

$$v(\cos\phi, \sin\phi) = \frac{-\sin\phi}{1} + \frac{\log\sqrt{1}}{2\pi} + \sin\phi = 0,$$

azaz az egységkör áramvonal, és rajta az áramfüggvény állandó.

ELEMI FÜGGVÉNYEK

Definíció 12.

Az Euler formula alapján

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

- az egész számsíkon differenciálható és deriváltja e^z;
- a 0 értéket sehol sem veszi fel, hiszen $e^x > 0$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén;
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

Definíció szerint

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{és} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Az Euler formula következményeként könnyen látható, hogy

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \operatorname{ch} i\phi$$

és

$$\sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = -i \operatorname{sh} i\phi,$$

hiszen $e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$.

Tétel 7.

Komplex változós exponenciális függvény periodikus, és periódusa $2i\pi$*, azaz*

$$e^z = e^{z+2i\pi k}, \quad z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}.$$

Azaz inverze csak bizonyos megszorításokkal értelmezhető.

Definíció 13.

Az e^z függvény $S = \{z : -\pi < \Im(z) \leq \pi\}$ tartományra való leszűkítésének inverz függvényét **logaritmus függvény***nek nevezzük.*

Tétel 8.

Az $\log z = \log(x + iy) = \log(r(\cos\phi + i\sin\phi))$ függvény valós része

$$u(x, y) = \log r = \log\sqrt{x^2 + y^2},$$

képzetes része pedig

$$v(x, y) = \phi + 2k\pi = \arg z.$$

Mivel az e^z függvény a 0 értéket nem veszi fel, de minden mást igen, így a periodusa miatt akárhogyan jelölünk is ki egy 2π szélességű vízszintes sávot a komplex számsíkon, ebbe a

$$z = \log r + i(\phi + 2k\pi)$$

pontok közül pontosan egy fog beleesni.

Tehát az e^z függvény ezt a sávot kölcsönösen egyértelműen képezi le a teljes síkra, kivéve belőle a 0 pontot.

A $(-i\pi, i\pi]$ sávba eső értékeket szokták a $\log w$ **főérték**ének nevezni.

KOMPLEX VONALINTEGRÁL

Definíció 14.

Legyen $T \subset \mathbb{C}$ *tartomány,* G *egy rektifikálható (véges ívhosszú), irányított görbedarab* T*-ben* a *és* b *kezdő- és végpontokkal, és legyen* $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *a* G *görbe egy paraméterezése. Legyen* $f : T \to \mathbb{C}$ *folytonos függvény.*

Tekintsük a G *görbe egy* $P = \{a = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = b\}$ *felosztását, azaz véges sok olyan pontot a görbén, melyek az irányítás szerinti rendezés értelmében monoton növőek. A görbe* z_k *és* z_{k+1} *pontja közötti ívet jelölje* $\widehat{z_k z_{k+1}}$*, a felosztás finomsága alatt pedig a*

$$|P| = \sup\{d(\widehat{z_k z_{k+1}}) : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

számot értjük.

Definíció 15 (Folytatás).

Legyen $\gamma_k \in \widehat{z_k z_{k+1}}$ *belső pont,* $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *és tekintsük az*

$$S(f, \gamma, P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)(z_{k+1} - z_k)$$

közelítő összeget. Ha létezik olyan I *szám, melyre bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $\delta > 0$, *hogy* $|P| < \delta$ *esetén bármely* $\{\gamma_i\}$ *rendszerre*

$$|S(f, \gamma, P) - I| < \varepsilon,$$

akkor f *a* G *görbe mentén integrálható, továbbá* **görbe menti integrál***jának értéke éppen* I.

Jelölés:

$$\int_G f(z)\mathrm{d}z, \quad \text{zárt görbe esetén} \quad \oint_G f(z)\mathrm{d}z$$

Komplex vonalintegrál - tulajdonságok

Jelölje $L(G)$ a rektifikálható, irányított G görbe mentén integrálható komplex függvények halmazát.

Tétel 9.

Folytonos komplex függvény rektifikálható görbe mentén mindig integrálható.

Tulajdonságok:

Tétel 10.

Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, G, G_1, G_2 rektifikálható görbék T-ben, $f, f_1, f_2 : T \to \mathbb{C}$ folytonos függvények, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Ekkor

1. *Ha $f_1, f_2 \in L(G)$, akkor $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in L(G)$, és*

$$\int_G c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)\,\mathrm{d}z = c_1 \int_G f_1(z)\,\mathrm{d}z + c_2 \int_G f_2(z)\,\mathrm{d}z$$

Tétel 11 (Folytatás).

2. *Ha* G_1 *és* G_2 *csatlakozó görbék, akkor* $f \in L(G_1)$ *és* $f \in L(G_2)$ *esetén* $f \in L(G_1 + G_2)$*, és*

$$\int_{G_1+G_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{G_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{G_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

3. *Ha* $f \in L(G)$*, akkor* $f \in L(-G)$ *(ellentétes irányítású görbe), és*

$$\int_{-G} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{G} f(z)\,\mathrm{d}z$$

4. *Ha* $f \in L(G)$ *és* $|f(z)| \leq M$ *bármely* $z \in G$ *esetén, akkor*

$$\left|\int_{G} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M \cdot l(G),$$

ahol $l(G)$ *a görbe ívhosszát jelöli.*

Tétel 12.

Legyen G olyan rektifikálható görbe, melynek g paraméterezése folytonosan differenciálható függvény, és legyen $f \in L(G)$. Ekkor

$$\int_G f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot \dot{g}(t)\,\mathrm{d}t$$

Tétel 13 (Cauchy-tétel, a komplex függvénytan főtétele).

Ha f a T egyszeresen összefüggő tartományban analitikus, és G a T belsejében haladó, zárt, rektifikálható görbe, akkor

$$\int_G f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Tétel 14.

Az egyszeresen összefüggő T tartományon analitikus függvény T-ben haladó görbék menti integrálja kizárólag a görbe kezdő- és végpontjától függ, az integrációs úttól független.

Tétel 15.

Tegyük fel, hogy $G, G_1, \ldots, G_n$ egyszerű, zárt, rektifikálható görbék, és G tartalmazza a belsejében az összes többit, de ők egymást már nem. Tegyük fel továbbá, hogy f analitikus azon a tartományon, mely G belsejében, de a G_i görbék külsejében van. Ekkor

$$\oint_G f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{G_i} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

feltéve, hogy a görbék irányítása megegyezik.

Primitív függvény fogalma I

Tétel 16.

Az egyszeresen összefüggő T tartományon analitikus függvény T-ben haladó görbék menti integrálja kizárólag a görbe kezdő- és végpontjától függ, az integrációs úttól független.

Világos tehát, hogy ha teljesülnek az előző tétel feltételei, akkor a kezdőpont rögzítésével tekinthetjük az integrált úgy, mint a végpont függvénye, azaz definiálható az

$$\int_a^z f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(z)$$

függvény. Megmutatható, hogy ekkor $F'(z) = f(z)$.

Primitív függvény fogalma II

Definíció 16.

Ha a T tartományon analitikus f függvényhez található olyan F, mely ugyanezen a tartományon analitikus függvény, és melyre

$$F'(z) = f(z),$$

akkor a F függvényt f **primitív függvény***ének nevezzük.*

Tétel 17.

Egyszeresen összefüggő tartományon analitikus $f(z)$ függvénynek mindig létezik primitív függvénye. Ekkor

$$\int_G f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a),$$

ahol a és b a G görbe kezdő- és végpontja.

Tétel 18 (Cauchy-féle integrálformula).

Ha f analitikus a T tartományon, akkor minden olyan pozitív irányban befutott, egyszerű, zárt G görbére, mely belsejével együtt benne van T-ben, és amely a z_0 pontot a belsejében tartalmazza fennáll, hogy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Tétel 19.

Tegyük fel, hogy $G, G_1, \ldots, G_n$ *egyszerű, zárt, rektifikálható görbék, és* G *tartalmazza a belsejében az összes többit, de ők egymást már nem. Tegyük fel továbbá, hogy* f *analitikus azon a tartományon, mely* G *belsejében, de a* G_i *görbék külsejében van. Ekkor*

$$\oint_G f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{G_i} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

feltéve, hogy a görbék irányítása megegyezik.

Tétel 20.

Ha az $f : T \to \mathbb{C}$ függvény analitikus a T tartományon, akkor f akárhányszor differenciálható a tartomány pontjaiban, és bármely $z_0 \in T$ esetén f z_0 körül hatványsorba fejthető, azaz

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots .$$

A fenti sorfejtés a z_0 pontnak azon maximális sugarú környezetében érvényes, mely teljes egészében T-ben fekszik.

Tétel 21 (Általánosított Cauchy-féle integrálformula).

Ha az $f : T \to \mathbb{C}$ függvény analitikus a T tartományon, akkor f akárhányszor differenciálható a tartomány pontjaiban, és

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

minden olyan egyszerű, pozitív irányítású, zárt G görbére, mely belsejével együtt T-ben fekszik, és a z_0 pontot a belsejében tartalmazza.

Tétel 22 (Liouville-tétel).

Ha f az egész nyílt síkon reguláris és egyúttal korlátos is, akkor szükségképpen konstans.

Definíció 17.

Ha f a z_0 pont egy környezetében z_0 kivételével mindenütt differenciálható, akkor a z_0 pontot f ***izolált szingularitás****ának nevezzük.*

Szingularitások osztályozása:

- megszüntethető a szingularitás, ha létezik $w_0 \in \mathbb{C}$ olyan, hogy az $f(z_0) = w_0$ kiterjesztéssel f z_0-ban differenciálhatóvá válik;
- a szinguláris hely pólus, ha nem megszüntethető, de létezik $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy a $g(z) = f(z)(z - z_0)^k$, $g(z_0) = w_0$, $z \neq z_0$ függvény már analitikus z_0-ban; k a pólus rendje ekkor
- lényeges a szingularitás, ha nem pólus és nem megszüntethető.

Kérdés: mi van akkor, ha pont egy ilyen szingularitás körül szeretnénk függvényünket sorbafejteni? $\Rightarrow$ Laurent-sor

Tétel 23.

Legyen az f *függvény analitikus a* z_0 *pont körüli*

$$(k_1, k_2) = \{z : r < |z - z_0| < R\}$$

körgyűrűben. Ekkor e körgyűrű tetszőleges pontjára igaz az

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

alakú **Laurent-sorfejtés**, *ahol*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

és G, *a körgyűrűben haladó, tetszőleges, egyszerű, zárt görbe olyan, mely a* z_0 *pontot pozitív irányban járja körbe.*

Kapcsolat a szinguláris helyekkel

- Ha z_0 megszüntethető szingularitás, akkor minden $c_{-n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, azaz Taylor-sorunk lesz;
- ha z_0 k-adrendű pólus, akkor $c_{-k} \neq 0$, és $c_{-m} = 0$, ha $m > k$;
- ha z_0 lényeges szingularitás, akkor végtelen sok olyan negatív indexű tagot tartalmaz a sorfejtés, melyek nullától különbözőek.

Definíció 18.

Legyen a z_0 pont f izolált szinguláris helye. A z_0 körüli Laurent sor c_{-1} együtthatóját a függvény z_0 ponthoz tartozó **reziduum***ának nevezzük. Azaz*

$$Res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z)\,\mathrm{d}z,$$

ahol G teljesíti az előző tétel feltételeit.

Tétel 24.

Legyen f analitikus a pozitív irányítású, egyszerű, zárt G görbén és annak belsejében, kivéve a véges sok $z_0, z_1, \ldots, z_n$ izolált szinguláris pontot, melyeket a G görbe a belsejében tartalmaz. Ekkor

$$\oint_G f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=0}^{n} Res(f, z_i).$$

Tétel 25.

1. *Legyenek* $g, h : T \to \mathbb{C}$ *olyan függvények, melyek analitikusak* T*-n, és* $z_0 \in T$ *olyan, melyre* $h(z_0) = 0$*, és* $h'(z_0) \neq 0$*. Ekkor*

$$Res\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

2. *Ha* z_0 k*-adrendű pólusa* f*-nek, akkor*

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left[(z - z_0)^k \cdot f(z) \right].$$