

# Interpoláció

Matematika M1 gépészmérnököknek

2017. március 13.

Tegyük fel, hogy egy ipari termék - pl. autó - előzetes konstrukciójának folyamán tervezni kell a karosszériát!

## Feltételek:

- (i) bizonyos  $(x_k, y_k, z_k)$  pontokon át kell haladnia a felületnek
- (ii) egyéb, speciális feltételeknek is megfelelő felületet akarunk illeszteni (pl. simaság, görbületi feltételek, stb...)
- (iii) fontos a mérési pontosság, illetve ennek növelése a mérési adatok növelésével
- (iv) lehetőleg polinomokat használjunk a könnyen kezelhetőség miatt.

Azaz a cél megváltozott az előzőekhez képest, de ugyanúgy approximációs feladatot akarunk megoldani!

Az interpoláció alapfeladatát a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

## Definíció 1.

Tegyük fel, hogy ismerjük egy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt adott

$$a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$$

pontokban felvett

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

értékeit. Keresendő olyan  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, mely kielégíti a

$$g(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

**interpolációs feltételek**et.

## Megjegyzések:

- Az  $\{x_i\}_{i=1}^n$  pontokat **interpolációs alappontok**nak nevezzük.
- Az interpolációs feltétel teljesülése esetén azt reméljük, hogy a  $g(x)$  interpoláló függvény az alappontok által meghatározott intervallumokban jól közelíti az  $f(x)$  függvényt.
- Ha a  $g(x)$  függvénnyel  $f(x)$ -et az  $(x_1, x_n)$  intervallumon kívül közelítjük, akkor **extrapoláció**ról beszélünk.
- További feltételeket is előírhatunk az interpoláló függvényre, pl. különböző rendű deriváltak egyezése az alappontokban. A szóba jöhető  $g(x)$  függvények  $G$  halmazának megválasztásától és a feltételek esetleges kibővítésétől függően különböző típusú interpolációkról beszélünk.

## Definíció 2.

Tegyük fel, hogy a  $G$  halmaz valamely ismert  $\phi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  függvények

$$g(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x)$$

lineáris kombinációjaként áll elő. Ekkor a  $\phi_i$  függvényeket **alapfüggvények**nek (vagy bázisfüggvényeknek) nevezzük.

A feladat az ismeretlen  $a_1, \dots, a_n$  együtthatók interpolációs feltételből való meghatározása. Azaz az

$$a_1 \phi_1(x_1) + a_2 \phi_2(x_1) + \dots + a_n \phi_n(x_1) = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$a_1 \phi_1(x_n) + a_2 \phi_2(x_n) + \dots + a_n \phi_n(x_n) = f(x_n)$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Legyen

$$B = [\phi_j(x_i)]_{i,j=1}^n, \quad a = [a_1, \dots, a_n]^T, \quad \text{és} \quad c = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T.$$

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$Ba = c$$

alakú, melynek pontosan akkor van megoldása, ha  $\det B \neq 0$ . Ekkor  $a = B^{-1}c$ . **Fontos: legfeljebb annyi alapfüggvényt használjunk, ahány alappontunk van, különben a feladatot nem fogjuk tudni megoldani!**

### Definíció 3.

*Speciálisan, ha*

$$\phi_i(x) = x^{i-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

*akkor az ún. **Lagrange-féle interpolációs feladat**ról beszélünk.*

Az interpolációs feladat mátrixa ekkor

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

az ún. **Vandermonde-féle mátrix**, melyről tudjuk, hogy

$$\det B = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

azaz az alappontok különbözősége miatt biztosan nem-szinguláris. Tehát a Lagrange-féle interpolációs feladatnak **egyértelmű a megoldása**.

**Megjegyzés:** Nem minden  $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$  függvényrendszer és  $x_1 < \dots < x_n$  alappontok esetén van megoldása, illetve egyértelmű a megoldása a lineáris interpolációs feladatnak.

**Példa:** Legyen  $\phi_1(x) = 1$ ,  $\phi_2(x) = x^2$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . Ekkor

$$B = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det B = 0,$$

így ha  $f(x_1) = f(x_2)$ , akkor végtelen sok megoldása van a feladatnak, egyébként pedig nincs megoldása a feladatnak.



De a cél persze nem az, hogy ezt mindig megoldjuk, hiszen "drága" lenne!  
A cél most az, hogy megadjuk ennek egy olyan megoldását, mely könnyen számolható!

Legyen

$$q_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ezeket a  $q_i$  polinomokat nevezzük a **Lagrange-féle interpoláció bázisának**. Ekkor ha a Lagrange-féle polinomot az

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i q_i(x)$$

alakban írjuk fel, akkor könnyen látható, hogy  $L_n(x_k) = f_k$  teljesül minden alapontra.

**Kérdés:** Mekkora hibát vétünk az interpoláció során?

## Tétel 1.

Ha  $f \in C_{[a,b]}^n$ ,  $[x_1, x_n] \subseteq [a, b]$  és  $x^* \in [a, b]$ , akkor

$$f(x^*) - p(x^*) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x^* - x_1) \dots (x^* - x_n),$$

ahol  $\xi = \xi(x^*)$  az  $x^*$  és az  $x_1, x_n$  pontok által kifeszített intervallumban van.

Az alkalmazások során a tételt módosított formában szoktuk használni.

## Tétel 2.

*Tegyük fel, hogy a függvény  $n$ -dik deriváltja egyenletesen korlátos, azaz létezik egy olyan  $M_n \in \mathbb{R}$  sorozat, melyre*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n \quad (x \in [a, b]).$$

*Ekkor*

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_n}{n!} |(x - x_1) \dots (x - x_n)| \leq \frac{M_n}{n!} (b - a)^n.$$

A második egyenlőtlenség persze sokkal durvább becslést ad, mint az első, viszont  $x$ -től függetlenül egyenletes korlátot ad a hibára a teljes  $[a, b]$  intervallum esetén.

**Példa:** hány ekvidisztáns alappontban kell megadnunk a  $\sin x$  függvény táblázatát a  $[0, \pi/2]$  intervallumban ahhoz, hogy a közbülső pontokban a Lagrange interpolációt használva a hiba legfeljebb  $10^{-4}$  legyen?

**Megoldás:** Legyen  $h = x_{i+1} - x_i$ . Az

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_n}{n!} |(x - x_1) \dots (x - x_n)| \leq \frac{M_n}{n!} (b - a)^n$$

hibabecslés alapján tehát olyan  $h$ -t keresünk, melyre  $(M_2 h^2)/2 \leq 10^{-4}$ . A  $\sin x$  függvény tulajdonságai alapján az  $M_2 = 1$  választás kézenfekvő, amiből adódik, hogy  $h \leq \sqrt{2}/100$ ,  $n \geq \pi/2h$  miatt

$$n \geq 112.$$

Ha viszont a hibakorlátot az

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2}{2} \max |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

becslésből közvetlenül vezetjük le szélsőérték számítással, akkor az élesebb

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{8}$$

eredményt kapjuk. Ez alapján kiderül, ahogy

$$n = 28$$

alappont is elég.

**Módosított feladat:** nem csak a függvényértékeket, hanem bizonyos deriváltak értékét is elő akarjuk írni a függvényekre.

**Precíz megfogalmazás:** tegyük fel, hogy  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  különböző alappontok, továbbá  $m_0, \dots, m_k \in \mathbb{N}$  olyan multiplicitások, melyekre

$$\sum_{i=0}^n m_i = m.$$

Keresendő tehát olyan  $H$  polinom, melyre

$$H^{(j)}(x_i) = f_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m_i - 1,$$

ahol az  $(x_i, f_{ij})$  párok adottak. **Ez az ún. Hermite-féle interpoláció feladata.**

## Tétel 3.

*Az Hermite-féle interpolációs feladatnak pontosan egy megoldása van a legfeljebb  $(m - 1)$ -edfokú polinomok terében.*

- A megoldás most is egy alkalmas lineáris egyenletrendszer megoldásával történik (lásd majd gyakorlatokon).
- Lokálisan jobb approximációt kapunk, mint a Lagrange esetén, de a magasabb fokszám miatt vigyázni kell!

- A **trigonometrikus interpolációt** a

$$\phi_1(x) = 1$$

$$\phi_2(x) = \sin x, \quad \phi_3(x) = \cos x, \dots,$$

$$\phi_{2k}(x) = \sin kx, \quad \phi_{2k+1}(x) = \cos kx$$

$k = 1, \dots, n$ ,  $[a, b] = [-\pi, \pi]$  függvényrendszer,

- az **exponenciális interpolációt** a

$$\phi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_n$$

függvényrendszer definiálja.