Matematika M1 1. zárthelyi megoldások, 2017 tavasz

A csoport

Pontozás: $10 + 12 + 16 + 12 = 50$ pont

1. Számítsa ki az alábbi adatokhoz legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb másodfokú polinomot!

x_i	-3	-2	-1	0	1
y_i	1	3	6	1	0

Megoldás: A keresett polinom $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $\boxed{\text{1 pont}}$. A Gauss-féle normálegyenlet megoldását keressük, ahol a Gram-mátrix

$$A^\intercal A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 15 \\ -5 & 15 & -35 \\ 15 & -35 & 99 \end{pmatrix}, \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

a jobb oldal pedig

$$A^\intercal f = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ 27 \end{pmatrix}, \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

tehát a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 15 \\ -5 & 15 & -35 \\ 15 & -35 & 99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ 27 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

Ekkor a megoldás

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & 15 & 11 \\ -5 & 15 & -35 & -15 \\ 15 & -35 & 99 & 27 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & 15 & 11 \\ 0 & 10 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right), \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

innen $a_2 = -1, a_1 = -\frac{12}{5}, a_0 = \frac{14}{5}$, tehát a keresett polinom $p(x) = -x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{14}{5}$. $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Számítsa ki az e^{At} mátrixfüggvényt, ha A az alábbi:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: A mátrix karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = (-2-\lambda)(-4-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2,$$

tehát a mátrixnak egy kétszeres sajátértéke van, $\lambda = -3$. $\boxed{\text{3 pont}}$

Ekkor keressük azt a $h(x) = a_1x + a_0$ elsőfokú polinomot $\boxed{\text{1 pont}}$, amely megoldása a

$$h(-3) = e^{-3t}, \quad \boxed{\text{1 pont}}$$
$$h'(-3) = te^{-3t} \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

Hermite-interpolációs feladatnak. Ekkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (-3) + a_0 &= e^{-3t}, \\ a_1 &= te^{-3t}, \end{aligned}$$

innen $a_1 = te^{-3t}, a_0 = 3te^{-3t} + e^{-3t}$. $\boxed{\text{3 pont}}$

$$e^{At} = h(A) = te^{-3t} \cdot A + \left(3te^{-3t} + e^{-3t}\right) \cdot I = \begin{pmatrix} (t+1)e^{-3t} & -te^{-3t} \\ te^{-3t} & (1-t)e^{-3t} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{3 pont}}$$

(*Megjegyzés : Természetesen a polinomot $h(\lambda, t) = a_1\lambda t + a_0$ alakban is lehet keresni, az is ugyanez a megoldás.*

3. Laplace-transzformáció felhasználásával számítsa ki az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$y''(t) + 4y(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le t < 2, \\ 1, & \text{ha } t \ge 2, \end{cases} \qquad y(0) = 0; y'(0) = 1$$

<u>Táblázat részlet:</u> $\mathcal{L}(e^{at}f(t), (s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}(\eta(t-a)f(t-a), s) = e^{-as}F(s), \quad \mathcal{L}(\eta, s) = \frac{1}{s},$
$\mathcal{L}(\sin, s) = \frac{1}{1+s^2}, \quad \mathcal{L}(\cos, s) = \frac{s}{1+s^2}.$

Megoldás: Legyen $Y(s) = \mathcal{L}(y, s)$ és $\eta(t)$ az egységugrásfüggvény, ekkor a megoldandó egyenlet és Laplace-transzformáltja a következő:

$$y''(t) + 4y(t) = \eta(t-2) \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} + 4Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\underbrace{\left(s^2+4\right)Y(s) - 1}_{\boxed{2 \text{ pont}}} = \underbrace{\frac{e^{-2s}}{s}}_{\boxed{2 \text{ pont}}}$$

Innen

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s\left(s^2+4\right)} + \frac{1}{s^2+4} \quad \boxed{2 \text{ pont}}$$

Az első tagban parciális törtekre bontunk:

$$\frac{1}{s\left(s^2+4\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2+4}. \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

Ekkor

$$Y(s) \underset{\boxed{1 \text{ pont}}}{=} e^{-2s} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) \underset{\boxed{3 \text{ pont}}}{=} \eta(t-2) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \eta(t-2) - \frac{1}{4}\cos(2(t-2))\right) + \frac{1}{2}\sin(2t) =$$

$$\underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{=} \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(2t) & \text{ha } 0 \le t < 2, \\ \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2(t-2)) & \text{ha } t \ge 2. \end{cases}$$

4. Egy gyárban három gép gyárt lemezalkatrészeket. A folyamat során megsérülhetnek a termékek. Az első gépből 0,01 valószínűséggel, a második gépből 0,06 valószínűséggel, a harmadik gépből 0,08 valószínűséggel kerül ki sérülten egy elem, ezért a termékek felét az első gépen gyártják, a második és harmadik gépen pedig egy-egy negyedét. Egy sérülés javítható, de csak ha 2mm-nél nem nagyobb átmérőjű. Egy sérülés átmérője mm-ben mérve exponenciális eloszlású

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 0, \\ e^{-t} & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy egy sérült terméket az első gépen gyártottak?

b.) Minőségellenőrzéskor 1000 véletlenszerűen választott terméket vizsgálunk meg. Mennyi az ezek között levő sérültek számának várható értéke és szórása?

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy egy sérülés nem javítható?

Megoldás:

a.) Legyenek a B_1, B_2, B_3 események rendre azok, hogy egy adott terméket az 1., 2., 3. gépen gyártottak. Ekkor B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszert alkot. Legyen A esemény az, hogy a termék sérült. A feladat szerint

$$P(A|B_1) = 0,01 \qquad P(B_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B_2) = 0,06 \qquad P(B_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B_3) = 0,08 \qquad P(B_3) = \frac{1}{4} \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

Ekkor a keresett valószínűség a Bayes-tétel szerint

$$P(B_1|A) \underset{\boxed{\text{2 pont}}}{=} \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{6}{100}\cdot\frac{1}{4}+\frac{8}{100}\cdot\frac{1}{4}} \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \frac{\frac{1}{200}}{\frac{4}{100}} = \frac{1}{8}.$$

b.) n=1000 terméket választunk ki, egy termék pedig $P(A) = P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3) = 0,04$ valószínűséggel lesz hibás $\boxed{\text{1 pont}}$. Ekkor a hibásak ξ darabszáma a mintában binomiális eloszlású $n = 1000$ és $p = 0,04$ paraméterekkel ($\xi \sim Bin(1000; 0,04)$) $\boxed{\text{1 pont}}$, tehát

$$E\xi = n \cdot p = 1000 \cdot 0,04 = 40, \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$D\xi = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0,04 \cdot 0,96} = \sqrt{40 \cdot 0,96} = \sqrt{\frac{192}{5}} = \sqrt{38,4}. \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

c.) Legyen η a sérülés átmérője, ekkor

$$P(\eta > 2) = \int_2^\infty f_\eta(x)\,\mathrm{d}x = 1 - F_\eta(2) = \frac{1}{e^2}. \quad \boxed{\text{4 pont}}$$

Mindegy, hogy az integrállal számoljuk ki vagy integrálással meghatározzuk az eloszlásfüggvényt, esetleg fejből tudjuk az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét. Bármelyik megoldásra jár a pont.

Matematika M1 1. zárthelyi megoldások, 2017 tavasz

B csoport

Pontozás: $10 + 12 + 16 + 12 = 50$ pont

1. Írja fel az alábbi adatokra a Lagrange féle interpolációs polinomot, és számítsa ki a polinom értékét a megadott x_0 helyen.

x_i	-2	-1	1	2
y_i	-2	1	-2	1

$x_0 = 0$

Megoldás: A keresett harmadfokú polinom $p_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k \cdot L_k(x)$ $\boxed{\text{1 pont}}$, ahol

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{3} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (-2) \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} + 1 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} + \\ &+ (-2) \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} + 1 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} = \\ &= \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}. \quad \boxed{\text{6 pont}} \end{aligned}$$

Ekkor az x_0 pontban a függvényérték $p_3(0) = -\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Számítsa ki az e^{At} mátrixfüggvényt, ha A az alábbi:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2,$$

tehát a mátrixnak egy kétszeres sajátértéke van, $\lambda = -1$. $\boxed{\text{3 pont}}$

Ekkor keressük azt a $h(x) = a_1 x + a_0$ elsőfokú polinomot $\boxed{\text{1 pont}}$, amely megoldása a

$$\begin{aligned} h(-1) &= e^{-t}, \quad \boxed{\text{1 pont}} \\ h'(-1) &= te^{-t} \quad \boxed{\text{1 pont}} \end{aligned}$$

Hermite-interpolációs feladatnak. Ekkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (-1) + a_0 &= e^{-t}, \\ a_1 &= te^{-t}, \end{aligned}$$

innen $a_1 = te^{-t}, a_0 = te^{-t} + e^{-t}$. $\boxed{\text{3 pont}}$

$$e^{At} = h(A) = te^{-t} \cdot A + \left(te^{-t} + e^{-t}\right) \cdot I = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (1+2t)e^{-t} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{3 pont}}$$

(*Megjegyzés : Természetesen a polinomot $h(\lambda, t) = a_1 \lambda t + a_0$ alakban is lehet keresni, az is ugyanez a megoldás.*

3. Laplace-transzformáció felhasználásával számítsa ki az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$y''(t) + 9y(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq t < 5, \\ 1, & \text{ha } t \geq 5, \end{cases} \qquad y(0) = 0; y'(0) = 1$$

<u>Táblázat részlet:</u> $\mathcal{L}(e^{at}f(t),(s) = F(s-a)$, $\mathcal{L}(\eta(t-a)f(t-a),s) = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}(\eta,s) = \frac{1}{s}$,
$\mathcal{L}(\sin,s) = \frac{1}{1+s^2}$, $\mathcal{L}(\cos,s) = \frac{s}{1+s^2}$.

Legyen $Y(s) = \mathcal{L}(y,s)$ és $\eta(t)$ az egységugrásfüggvény, ekkor a megoldandó egyenlet és Laplace-transzformáltja a következő:

$$y''(t) + 9y(t) = \eta(t-5) \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$s^2 \cdot Y(s) - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} + 9Y(s) = \frac{e^{-5s}}{s}$$

$$\underbrace{\left(s^2+9\right)Y(s) - 1}_{\boxed{2 \text{ pont}}} = \underbrace{\frac{e^{-5s}}{s}}_{\boxed{2 \text{ pont}}}$$

Innen

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{s\left(s^2+9\right)} + \frac{1}{s^2+9} \quad \boxed{2 \text{ pont}}$$

Az első tagban parciális törtekre bontunk:

$$\frac{1}{s\left(s^2+9\right)} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\cdot\frac{s}{s^2+9}. \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

Ekkor

$$Y(s) \underset{\boxed{1 \text{ pont}}}{=} e^{-5s}\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\cdot\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

$$y(t) \underset{\boxed{3 \text{ pont}}}{=} \eta(t-5)\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\eta(t-5) - \frac{1}{9}\cos(3(t-5))\right) + \frac{1}{3}\sin(3t) =$$

$$\underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{=} \begin{cases} \frac{1}{3}\sin(3t) & \text{ha } 0 \le t < 5, \\ \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3(t-5)) & \text{ha } t \ge 5. \end{cases}$$

4. Egy gyárban három gép gyárt lemezalkatrészeket. A folyamat során megsérülhetnek a termékek. Az első gépből 0,01 valószínűséggel, a második gépből 0,1 valószínűséggel, a harmadik gépből 0,08 valószínűséggel kerül ki sérülten egy elem, ezért a termékek felét az első gépen gyártják, a második és harmadik gépen pedig egy-egy negyedét. Egy sérülés javítható, de csak ha 3mm-nél nem nagyobb átmérőjű. Egy sérülés átmérője mm-ben mérve exponenciális eloszlású

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 0, \\ e^{-t} & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy egy sérült terméket az első gépen gyártottak?

b.) Minőségellenőrzéskor 1000 véletlenszerűen választott terméket vizsgálunk meg. Mennyi az ezek között levő sérültek számának várható értéke és szórása?

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy egy sérülés nem javítható?

Megoldás:

a.) Legyenek a B_1, B_2, B_3 események rendre azok, hogy egy adott terméket az 1., 2., 3. gépen gyártottak. Ekkor B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszert alkot. Legyen A esemény az, hogy a termék sérült. A feladat szerint

$$P(A|B_1) = 0,01 \qquad P(B_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B_2) = 0,1 \qquad P(B_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B_3) = 0,08 \qquad P(B_3) = \frac{1}{4} \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

Ekkor a keresett valószínűség a Bayes-tétel szerint

$$P(B_1|A) \underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{=} \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4} + \frac{8}{100}\cdot\frac{1}{4}} \underset{\boxed{1 \text{ pont}}}{=} \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{10}.$$

b.) n=1000 terméket választunk ki, egy termék pedig $P(A) = P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3) = 0,05$ valószínűséggel lesz hibás $\boxed{\text{1 pont}}$. Ekkor a hibásak ξ darabszáma a mintában binomiális eloszlású $n = 1000$ és $p = 0,05$ paraméterekkel ($\xi \sim Bin(1000; 0,05)$) $\boxed{\text{1 pont}}$, tehát

$$E\xi = n \cdot p = 1000 \cdot 0,05 = 50, \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$D\xi = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = \sqrt{50 \cdot 0,95} = \sqrt{47,5}. \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

c.) Legyen η a sérülés átmérője, ekkor

$$P(\eta > 3) = \int_3^\infty f_\eta(x)\,\mathrm{d}x = 1 - F_\eta(3) = \frac{1}{e^3}. \quad \boxed{\text{4 pont}}$$

Mindegy, hogy az integrállal számoljuk ki vagy integrálással meghatározzuk az eloszlásfüggvényt, esetleg fejből tudjuk az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét. Bármelyik megoldásra jár a pont.