Matematika M1 1. zárthelyi megoldások, 2017 tavasz

$\boxed{\textbf{A} \text{ csoport}}$

Pontozás: $10 + (7 + 7 + 7) + 13 + 6 = 50$ pont.

1. Lehet-e az

$$u(x, y) = e^{3x} \cdot \cos(3y)$$

kétváltozós valós függvény egy reguláris komplex függvény valós része? Ha igen, adja meg a megfelelő komplex függvényt!

Megoldás: $u(x, y)$ lehet egy reguláris komplex függvény valós része, ha $\triangle u(x, y) = u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0$.

$$u'_x(x, y) = 3 \cdot e^{3x} \cdot \cos(3y) \qquad u''_{xx}(x, y) = 9 \cdot e^{3x} \cdot \cos(3y) \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$u'_y(x, y) = (-3) \cdot e^{3x} \cdot \sin(3y) \qquad u''_{yy}(x, y) = (-9) \cdot e^{3x} \cdot \cos(3y) \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$\triangle u(x, y) = 0 \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

Tehát lehet, ekkor a Cauchy-Riemann egyenletekből megkeressük a v képzetes részt:

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y) = 3e^{3x} \cos(3y) \quad \boxed{1 \text{ pont}} \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \int 3e^{3x} \cos(3y)\, \mathrm{d}y = e^{3x} \sin(3y) + c_1(x) \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$u'_y(x, y) = -v'_x(x, y) = -3e^{3x} \sin(3y) \quad \boxed{1 \text{ pont}} \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = -\int -3e^{3x} \sin(3y)\, \mathrm{d}x = e^{3x} \sin(3y) + c_2(y) \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$\Rightarrow c_1(x) = c_2(y) = c \in \mathbb{R};\ v(x, y) = e^{3x} \sin(3y) + c \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

Ekkor a keresett reguláris komplex függvény

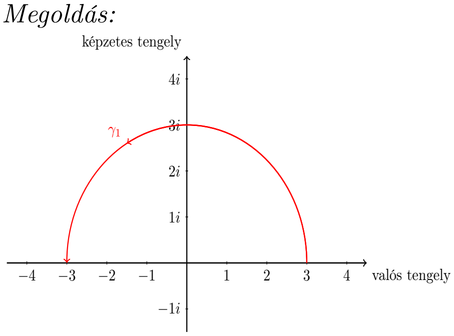
$$f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) = e^{3x} \cdot \cos(3y) + i \cdot e^{3x} \cdot \sin(3y) + ci = e^{3x} \cdot (cos(3y) + i \cdot \sin(3y)) + c = e^{3z} + ci,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ és $z = x + iy$. $\boxed{2 \text{ pont}}$

2. Készítsen ábrát a görbékről és számítsa ki az alábbi vonalintegrálokat!

a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} z \cdot |z|\, \mathrm{d}z$, ha γ_1 a $z_1 = 3, z_2 = -3$ pontokat összekötő felső félkörív $z_1 \to z_2$ irányítással;

Megoldás:



$\boxed{1 \text{ pont}}$

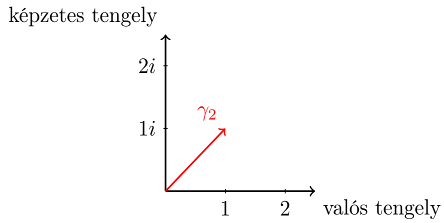
A γ_1 görbe egy paraméterezése :
$g(t) = 3e^{it}$, $g : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ $\boxed{1 \text{ pont}}$
ekkor $g'(t) = 3ie^{it}$ $\boxed{1 \text{ pont}}$.

Az integrál értéke innen

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, \mathrm{d}z \underset{\boxed{1 \text{ pont}}}{=} \int_0^\pi \left(3e^{it} \cdot |3e^{it}|\right) \cdot 3ie^{it}\, \mathrm{d}t \underset{\boxed{1 \text{ pont}}}{=} \int_0^\pi 3e^{it} \cdot 3 \cdot 3ie^{it}\, \mathrm{d}t \underset{\boxed{1 \text{ pont}}}{=} \int_0^\pi 27ie^{2it}\, \mathrm{d}t = 27i \left[\frac{e^{2it}}{2i}\right]_0^\pi \underset{\boxed{1 \text{ pont}}}{=} 0.$$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} z \cdot |z| \, \mathrm{d}z$, ha γ_2 a $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$ pontokat összekötő egyenes szakasz $z_1 \to z_2$ irányítással;

Megoldás:



$\boxed{\text{1 pont}}$

A γ_2 görbe egy paraméterezése :
$g(t) = (1+i)t,\ g : [0,1] \to \mathbb{C}$ $\boxed{\text{1 pont}}$
ekkor $g'(t) = 1 + i$ $\boxed{\text{1 pont}}$.

Az integrál értéke innen

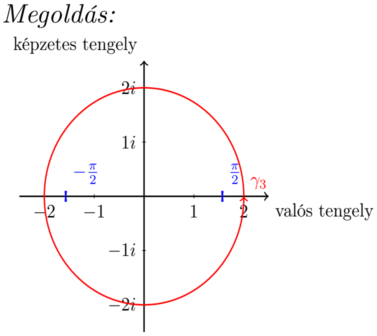
$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \int_0^1 ((1+i)t \cdot |(1+i)t|) \cdot (1+i)\,\mathrm{d}t \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=}$$

$$= \int_0^1 (1+i)t \cdot \sqrt{2}t \cdot (1+i)\,\mathrm{d}t \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \int_0^1 (1+i)^2 \sqrt{2} t^2\,\mathrm{d}t = (1+i)^2\sqrt{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=}$$

$$= \frac{(1+i)^2\sqrt{2}}{3}.$$

c) $\displaystyle\oint_{\gamma_3} \frac{z^2}{\cos(z)} + z^2 \cdot \cos(z)\,\mathrm{d}z$, ha $\gamma_3 : |z| = 2$ pozitív irányítással

Megoldás:



$\boxed{\text{1 pont}}$

A $z^2 \cdot \cos(z)$ függvény analitikus az egész síkon, így zárt görbén az integrálja a Cauchy-alaptétel szerint 0, így elég az összeg első tagját integrálni. $\boxed{\text{1 pont}}$
A γ_3 görbe a 0 középpontú, 2 sugarú kör. Ezen belül a nevező a $\frac{\pi}{2}$ és a $-\frac{\pi}{2}$ pontokban 0. Minden más pontban az integrálandó függvény analitikus. $\boxed{\text{1 pont}}$

Az $f(z) = \frac{z^2}{\cos(z)}$ függvény integráljának értéke ekkor a reziduumtétellel

$$\oint_{\gamma_3} \frac{z^2}{\cos(z)}\,\mathrm{d}z \underset{\boxed{\text{2 pont}}}{=} 2\pi i\left(Res\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) + Res\left(f, \frac{\pi}{2}\right)\right) \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = 2\pi i\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\right) \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} 0.$$

4. Határozza meg az

$$f(z) = \frac{\mathrm{ch}(iz) \cdot \mathrm{sh}(iz)}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}$$

függvény reziduumát a $z_0 = \frac{\pi}{2}$ pontban!

Megoldás: A $g(z) = \mathrm{ch}(iz) \cdot \mathrm{sh}(iz)$, $h(z) = z^2 - \frac{\pi^2}{4}$ szereposztással $f = \frac{g}{h}$ $\boxed{\text{2 pont}}$, g és h analitikusak z_0-ban, $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$ $\boxed{\text{2 pont}}$, így

$$Res\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{g(\pi)}{h'(\pi)} = \frac{\mathrm{ch}(i\pi/2) \cdot \mathrm{sh}(i\pi/2)}{\pi} = 0. \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

3. Írja föl az

$$f(z) = \frac{iz-1}{z^2-iz}$$

függvény Taylor vagy Laurent sorfejtését a $z_0 = -i$ pont körül a lehetséges tartományok figyelembevételével!

Megoldás: A $-i$ körüli sorfejtésben $c_n(z+i)^n$ alakú tagokat keresünk.

$$\frac{iz-1}{z^2-iz} = \frac{i(z+i)}{z(z-i)} = (z+i)\cdot\frac{i}{z(z-i)} \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

Parciális törtekre bontással

$$\frac{i}{z(z-i)} \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z} \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \frac{1}{(z+i)-2i} - \frac{1}{(z+i)-i}.$$

Ekkor az $\frac{1}{z-i}$ sorfejtése $z_0 = -i$ körül

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z+i)-2i} = -\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z+i}{2i}\right)} = -\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^n\cdot(z+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -1\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n,$$

$$\text{ha} \quad \left|\frac{z+i}{2i}\right| = \left|\frac{z+i}{2}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z+i| < 2, \quad \boxed{\text{2 pont}} \quad \text{és}$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z+i)-2i} = \frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{2i}{z+i}} = \frac{1}{z+i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n\cdot(z+i)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n\cdot(z+i)^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n,$$

$$\text{ha} \quad \left|\frac{2i}{z+i}\right| = \left|\frac{2}{z+i}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z+i| > 2 \quad \boxed{\text{2 pont}}.$$

Hasonlóan $\frac{1}{z}$ sorfejtése $z_0 = -i$ körül

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+i)-i} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z+i}{i}\right)} = -\frac{1}{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^n\cdot(z+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -1\cdot\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n,$$

$$\text{ha} \quad \left|\frac{z+i}{i}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z+i| < 1, \quad \boxed{\text{2 pont}} \quad \text{és}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+i)-i} = \frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z+i}} = \frac{1}{z+i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} i^n\cdot(z+i)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n\cdot(z+i)^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n,$$

$$\text{ha} \quad \left|\frac{i}{z+i}\right| = \left|\frac{1}{z+i}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z+i| > 1 \quad \boxed{\text{2 pont}}.$$

Tehát a $z_0 = -i$ körül a $|z+i| < 1$ körgyűrűn

$$f(z) = (z+i)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} -1\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n - \sum_{n=0}^{\infty} -1\cdot\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{i}\right)^n - \left(\frac{1}{2i}\right)^n\right)(z+i)^n,$$

a $1 < |z+i| < 2$ körgyűrűn

$$f(z) = (z+i)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} -1\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -1\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^n\cdot(z+i)^n + \sum_{n=-\infty}^{0} -1\cdot\left(\frac{1}{i}\right)^n\cdot(z+i)^n,$$

a $|z+i| > 2$ körgyűrűn pedig

$$f(z) = (z+i)\cdot\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\left(\frac{1}{2i}\right)^n - \left(\frac{1}{i}\right)^n\right)\cdot(z+i)^n.$$

$\boxed{\text{2 pont}}$

Megjegyzés : Teljes megoldás adható úgy is, ha nem szorzatra bontunk az elején, hanem összeadandókra.

Matematika M1 1. zárthelyi megoldások, 2017 tavasz

$\boxed{\textbf{B}\text{ csoport}}$

Pontozás: $10 + (7 + 7 + 7) + 13 + 6 = 50$ pont.

1. Lehet-e az

$$u(x, y) = x^3y + xy - xy^3$$

kétváltozós valós függvény egy reguláris komplex függvény valós része? Ha igen, adja meg a megfelelő komplex függvényt!

Megoldás: $u(x, y)$ lehet egy reguláris komplex függvény valós része, ha $\triangle u(x, y) = u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0$.

$$u'_x(x, y) = 3x^y + y - y^3 \qquad u''_{xx}(x, y) = 6xy \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$u'_y(x, y) = x^3 + x - 3xy^2 \qquad u''_{yy}(x, y) = -6xy \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$\triangle u(x, y) = 0 \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

Tehát lehet, ekkor a Cauchy-Riemann egyenletekből megkeressük a v képzetes részt:

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y) = 3x^2y + y - y^3 \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \int 3x^2y + y - y^3 \,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4 + c_1(x) \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$u'_y(x, y) = -v'_x(x, y) = x^3 + x - 3xy^2 \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \int -x^3 - x + 3xy^2 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2y^2 + c_2(y) \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

$$\Rightarrow v(x, y) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}x^2y^2 + c \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

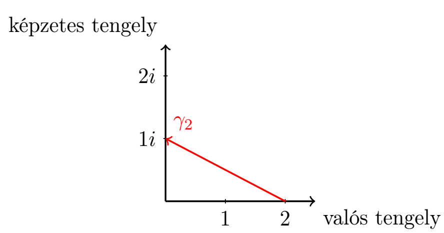
Ekkor a keresett reguláris komplex függvény

$$f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) = x^3y + xy - xy^3 + i \cdot \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}x^2y^2 + c\right),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{2 pont}}$

2. Készítsen ábrát a görbékről és számítsa ki az alábbi vonalintegrálokat!

a) $\displaystyle\int_{\gamma_2} z \cdot \overline{z} \,\mathrm{d}z$, ha γ_2 a $z_1 = 2, z_2 = i$ pontokat összekötő egyenes szakasz $z_1 \to z_2$ irányítással;



$\boxed{\text{1 pont}}$

A γ_2 görbe egy paraméterezése : $g(t) = 2 + t(i - 2) = (2 - 2t) + ti$, $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ $\boxed{\text{1 pont}}$

ekkor $g'(t) = i - 2$ $\boxed{\text{1 pont}}$.

Az integrál értéke innen

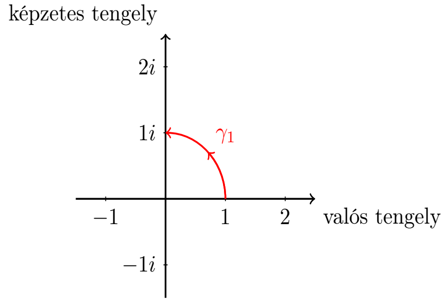
$$\int_{\gamma_2} f(z) \,\mathrm{d}z \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \int_0^1 (2 - 2t + ti) \cdot \overline{(2 - 2t + ti)} \cdot (i - 2) \,\mathrm{d}t \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=}$$

$$= \int_0^1 (2 - 2t + ti) \cdot (2 - 2t - ti) \cdot (i - 2) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (4 - 8t + 5t^2)(i - 2) \,\mathrm{d}t =$$

$$= (i - 2) \cdot \left[4t - 4t^2 + \frac{5}{3}t^3\right]_0^1 \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} (i - 2) \cdot \frac{5}{3}. \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_1} z \cdot \overline{z}\, \mathrm{d}z$, ha γ_1 a $z_1 = 1, z_2 = i$ pontokat összekötő negyedkörív $z_1 \to z_2$ irányítással;

Megoldás:



$\boxed{\text{1 pont}}$

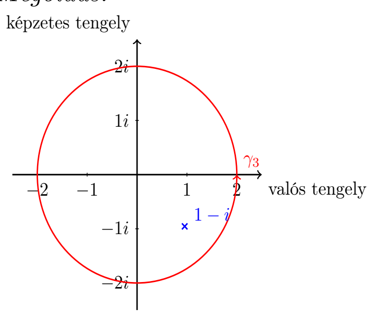
A γ_1 görbe egy paraméterezése :
$g(t) = e^{it}$, $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}$ $\boxed{\text{1 pont}}$
ekkor $g'(t) = ie^{it}$. $\boxed{\text{1 pont}}$

Az integrál értéke innen

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{it} \cdot \overline{e^{it}}\right) \cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} \cdot e^{-it} \cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ie^{it}\,\mathrm{d}t = \left[e^{it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} i - 1.$$

c) $\displaystyle\oint_{\gamma_3} \frac{i + e^{2z}}{(z - 1 + i)^2} + (z - 1 + i)^2 \cdot \left(i + e^{2z}\right) \mathrm{d}z$, ha $\gamma_3 : |z| = 2$ pozitív irányítással

Megoldás:



$\boxed{\text{1 pont}}$

A $(z-1+i)^2 \cdot \left(i + e^{2z}\right)$ függvény analitikus az egész síkon, így zárt görbén az integrálja a Cauchy-alaptétel szerint 0, így elég az összeg első tagját integrálni. $\boxed{\text{1 pont}}$
A γ_3 görbe a 0 középpontú, 2 sugarú kör. Ezen belül a nevező a $z_0 = 1 - i$ pontban 0, és z_0 kétszeres gyöke a nevezőnek. Minden más pontban az integrálandó függvény analitikus. $\boxed{\text{1 pont}}$

Az $f(z) = \frac{i+e^{2z}}{(z-1+i)^2}$ függvény integráljának értéke ekkor általánosított Cauchy-integrálformulával

$$\oint_{\gamma_3} \frac{i + e^{2z}}{(z - 1 + i)^2}\,\mathrm{d}z \underset{\boxed{\text{2 pont}}}{=} \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left(i + e^{2z}\right)' |_{z_0 = 1-i} \underset{\boxed{\text{2 pont}}}{=} 2\pi i \cdot 2e^{2-2i}$$

4. Határozza meg az

$$f(z) = \frac{\mathrm{ch}(iz) + \mathrm{sh}(iz)}{z^2 - \pi^2}$$

függvény reziduumát a $z_0 = \pi$ pontban!

Megoldás: A $g(z) = \mathrm{ch}(iz) + \mathrm{sh}(iz)$, $h(z) = z^2 - \pi^2$ szereposztással $f = \frac{g}{h}$ $\boxed{\text{2 pont}}$, g és h analitikusak z_0-ban, $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$ $\boxed{\text{2 pont}}$, így

$$Res(f, \pi) = \frac{g(\pi)}{h'(\pi)} = \frac{\mathrm{ch}(i\pi) + \mathrm{sh}(i\pi)}{2\pi} = \frac{e^{i\pi}}{2\pi} = \frac{-1}{2\pi}. \quad \boxed{\text{2 pont}}$$

3. Írja föl az
$$f(z) = \frac{-iz-1}{z^2+iz}$$
függvény Taylor vagy Laurent sorfejtését a $z_0 = i$ pont körül a lehetséges tartományok figyelembevételével!

Megoldás: A i körüli sorfejtésben $c_n(z-i)^n$ alakú tagokat keresünk.
$$\frac{-iz-1}{z^2+iz} = \frac{-i(z-i)}{z(z+i)} = (z-i)\cdot\frac{-i}{z(z+i)} \quad \boxed{\text{1 pont}}$$

Parciális törtekre bontással
$$\frac{-i}{z(z+i)} \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z} \underset{\boxed{\text{1 pont}}}{=} \frac{1}{(z-i)+2i} - \frac{1}{(z-i)+i}.$$

Ekkor az $\frac{1}{z+i}$ sorfejtése $z_0 = i$ körül
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2i}\right)^n\cdot(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n,$$
$$\text{ha} \quad \left|-\frac{z-i}{2i}\right| = \left|\frac{z-i}{2}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z-i| < 2, \quad \boxed{\text{2 pont}} \quad \text{és}$$
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2i}{z-i}\right)} = \frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-2i)^n\cdot(z-i)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2i)^n\cdot(z-i)^{-n-1} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{-2i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n,$$
$$\text{ha} \quad \left|-\frac{2i}{z-i}\right| = \left|\frac{2}{z-i}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z-i| > 2 \quad \boxed{\text{2 pont}}.$$

Hasonlóan $\frac{1}{z}$ sorfejtése $z_0 = i$ körül
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{i}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{i}\right)^n\cdot(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}-\left(\frac{-1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n,$$
$$\text{ha} \quad \left|-\frac{z-i}{i}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z-i| < 1, \quad \boxed{\text{2 pont}} \quad \text{és}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{i}{z-i}\right)} = \frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot(z-i)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot(z-i)^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{-1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n,$$
$$\text{ha} \quad \left|-\frac{i}{z-i}\right| = \left|\frac{1}{z-i}\right| < 1, \quad \text{azaz} \quad |z-i| > 1 \quad \boxed{\text{2 pont}}.$$

Tehát a $z_0 = i$ körül a $|z-i| < 1$ körgyűrűn
$$f(z) = (z-i)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\left(\left(\frac{1}{2i}\right)^n - \left(\frac{1}{i}\right)^n\right)(z-i)^n,$$
a $1 < |z-i| < 2$ körgyűrűn
$$f(z) = (z-i)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{-1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2i}\right)^n(z-i)^n - \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{-1}{i}\right)^n(z-i)^n$$
a $|z-i| > 2$ körgyűrűn pedig
$$f(z) = (z-i)\cdot\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{-2i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{-1}{i}\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n\right) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\left(\frac{-1}{2i}\right)^n - \left(\frac{-1}{i}\right)^n\right)(z-i)^n.$$

$\boxed{\text{2 pont}}$

Megjegyzés : Teljes megoldás adható úgy is, ha nem szorzatra bontunk az elején, hanem összeadandókra.

Szorgalmi feladat

(max. 10 pont, amit sikeres, azaz legalább 20 pontos zárthelyihez adunk hozzá)

Igaz-e, hogy $S = \{f \in C^2_{\mathbb{R}} : \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - 2xf(x) = 0; f(-1) = f(1)\}$ altere $C_{\mathbb{R}}$-nek? Válaszát indokolja!

Megoldás: $C^2_{\mathbb{R}} \subset C_{\mathbb{R}}$, ezért $S \subset C_{\mathbb{R}}$. Ha $f, g \in S$, akkor $f'(x) - 2xf(x) = 0, g'(x) - 2xg(x) = 0, f(-1) = f(1)$ és $g(-1) = g(1)$, ekkor

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) - 2x(f+g)(x) &= f'(x) - 2xf(x) + g'(x) - 2xg(x) = 0 + 0 = 0,\\
(c \cdot f)'(x) - 2x(c \cdot f)(x) &= c \cdot (f'(x) - 2xf(x)) = c \cdot 0 = 0,\\
(f+g)(-1) &= f(-1) + g(-1) = f(1) + g(1) = (f+g)(1),\\
(c \cdot f)(-1) &= c \cdot f(-1) = c \cdot f(1) = (c \cdot f)(1),
\end{aligned}$$

azaz a halmaz összeadásra és skalárral szorzásra nézve zárt. A konstans 0 függvény megoldása az egyenletnek és szimmetrikus, tehát eleme S-nek. a műveleti tulajdonságok is teljesülnek, tehát S vektortér, és altere $C_{\mathbb{R}}$-nek.

Megjegyzés : S definíciójában szereplő differenciálegyenlet megoldásai a $c \cdot e^{x^2}$ alakú függvények, tehát az $f(-1) = f(1)$ feltétel mindegyikre teljesül.