3. Házi feladat, Megoldás

326/44

"Igazolja a kompaktsági tétel segítségével, hogy ha egy Λ formulahalmaznak van tetszőlegesen nagy véges modellje, akkor van végtelen modellje is"

M. A bizonyítás a 86. oldalon található Példa mintájára történhet.

φ_n ott azt a tulajdonságot jelenti, hogy "legalább n eleműnek lenni" (87. oldal).

Legyen $\Sigma = \Lambda \cup \{\varphi_n\}_{n \in \omega}$. Vegyük észre, hogy Σ kielégíti a kompaktsági tétel feltételét, azaz közülük, bármely véges soknak van modellje, azaz, kielégíthető. Hiszen, ha Λ-nak van tetszőlegesen nagy modellje, akkor bármely véges részének is van. A kompaktsági tétel állításából következik, hpgy Σ is kielégíthető. Ez a φ_n tulajdonság miatt azt jelenti, hogy van végtelen nagy modellje.

326/42/i

$\forall x \forall y(\exists x Px \to \neg \exists u(\exists u Qxu \to Qyu)) \Leftrightarrow$

$\forall x \forall y(\forall x \neg Px \vee \forall u(\exists u Qxu \wedge \neg Qyu)) \Leftrightarrow$

$\forall x \forall y(\forall z \neg Pz \vee \forall v(\exists u Qxu \wedge \neg Qyv)) \Leftrightarrow$

$\forall x \forall y \forall z \forall v \exists u(\neg Pz \vee (Qxu \wedge \neg Qyv))$ Prenex

$\forall x \forall y \forall z \forall v \exists u((\neg Pz \vee Qxu) \wedge (\neg Pz \vee \neg Qyv))$

$\forall x \forall y \forall z \forall v((\neg Pz \vee QxU(x,y,z,v)) \wedge (\neg Pz \vee \neg Qyv))$ Erős Skolem

326/42/m

$\exists y \forall x(\exists x \forall x Rxy \leftrightarrow \forall y \exists y Qxy) \Leftrightarrow$

$\exists y \forall x(\forall x Rxy \leftrightarrow \exists y Qxy) \Leftrightarrow$

$\exists y \forall x((\neg \forall x Rxy \vee \exists y Qxy) \wedge (\forall x Rxy \vee \neg \exists y Qxy)) \Leftrightarrow$

$\exists y \forall x((\exists x \neg Rxy \vee \exists y Qxy) \wedge (\forall x Rxy \vee \forall y \neg Qxy)) \Leftrightarrow$

$\exists y \forall x((\exists u \neg Ruy \vee \exists v Qxv) \wedge (\forall z Rzy \vee \forall s \neg Qxs)) \Leftrightarrow$

$\exists y \forall x \exists u \exists v \forall z \forall s((\neg Ruy \vee Qxv) \wedge (Rzy \vee \neg Qxs))$ Prenex

$\forall x \forall z \forall s((\neg RUxY \vee QxVx) \wedge (RzY \vee \neg Qxs))$ Erős Skolem

328/1.a

$\{P \to Q, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S\} \vDash S \to \neg P$

Hozzávesszük a konklúzió negálját $\neg(S \to \neg P)$-t a premisszákhoz és a formulákat klóz alakra hozzuk:

$\neg P \vee Q$			⌉	Q	⌉	R	⌉	▫
$R \vee \neg Q$			│		⌋		│	
$\neg R \vee \neg S$	⌉	$\neg R$	│				⌋	
S	⌋		│					
P			⌋					

328/1c.

$\{P \wedge Q \to R, R \wedge S \to T, Q\} \vDash P \wedge S \to R \wedge T$

a megoldás, mint fent

$\neg P \lor \neg Q \lor R$	$\neg P \lor R$	R		T	$\neg R$	$\square$
$\neg R \lor \neg S \lor T$			$\neg R \lor T$			
Q						
P						
S						
$\neg R \lor \neg T$						

330/13a

Igazolja, hogy azonosan igaz: $(\alpha=)$ $((A\to B)\to\neg B) \to \neg B$

M. Az, hogy egy α azonosan igaz, az azt jelenti, hogy az üres klóz következménye, azaz

$\square \vDash \alpha$. Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy $\neg\alpha$ kielégíthetetlen, azaz $\neg\alpha$-ből levezethető az üres klóz.

Hozzuk $\neg\alpha$ -t klóz alakra:

$\neg[\,((A\to B)\to\neg B) \to \neg B] \Leftrightarrow (\neg(A\to B)\lor\neg B)) \land B \Leftrightarrow ((A\land\neg B)\lor\neg B)) \land B \Leftrightarrow$

$(A\lor\neg B) \land \neg B \land B$

De $\mathrm{Res}(B,\neg B) = \square$

Megj. Több módszer létezik az igazolásra. A rezolúcióval történő igazolás a fenti módon történhet.

329/7

A múlt heti házi feladatban már formalizáltuk a következményt:

$\{U\Leftrightarrow(B\lor E), E\to B\lor H\} \vDash \neg H \land E \to B$

Innen alkalmazzuk az 1, feladatban alkalmazott eljárást:

$\{U\to B\lor E, B\lor E\to U, \neg E\lor B\lor H, \neg(\neg H\land E\to B)\}$

$\{\neg U\lor B\lor E, \neg B\lor U, \neg E\lor U, \neg E\lor B\lor H, \neg H, E, \neg B\}$

Könnyű látni, hogy már az utolsó 4 klózból levezethető az üres klóz.