DIPLOMAMUNKA

Direkt hatványok részcsoporthálói

Csarmasz Máté

Témavezető:

Lukács Erzsébet
Egyetemi docens

BME Matematika Intézet
Algebra Tanszék

BME
2002

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Munkámban csoportok és részcsoporthálójuk kapcsolatát fogom vizsgálni. A kérdés az 1900-as évek elejére nyúlik vissza. Ekkor Ada Rottländer foglalkozott bizonyos testbővítési problémákkal, melyek vizsgálata során a részcsoporthálóval kapcsolatos kérdések merültek fel, és ezek közül többet meg is oldott. Felvetette a kérdést, hogy amennyiben két csoport részcsoporthálója között létezik index-tartó izomorfizmus, akkor igaz-e, hogy izomorfak. Belátta, hogy ha legalább az egyik véges és kommutatív, akkor a válasz pozitív. A nemkommutatív esetre pedig ellenpéldát mutatott. Később a témát többen vizsgálták. Egyre több csoport esetén sikerült belátni, hogy a részcsoportháló nagyon szoros kapcsolatban van a csoporttal.

Egyik fő forrásomul Suzuki 1956-ban megjelent könyvét használom, amelyben a szerző összefoglalta a témával kapcsolatos addigi eredményeket. Ezt azzal a bevallott reménnyel tette, hogy a részcsoporthálók vizsgálata esetleg segíthet az egyszerű csoportok klasszifikációjában. Ma már tudjuk, hogy nem így lett, sőt, bizonyos szempontból éppen fordítva történt: az említett klasszifikáció következménye, hogy az egyszerű véges csoportokat meghatározza a részcsoporthálójuk. Természetesen az eredmények azóta bővültek, de még mindig sok nyitott kérdés van. Témám motívációját Lukács Erzsébet 1989-es doktori disszertációja adja, ahol ő több egyéb állítás mellett belátta, hogy moduláris csoportok esetén a direkt négyzet részcsoporthálója már meghatározza a csoportot. Ennek kapcsán rögtön felmerült, lehet-e a tételen erősíteni, és ha igen, milyen irányban:

- Tudunk-e a moduláris csoportoknál tágabb osztályt találni, amire a direkt négyzet hálója elég a csoport leírásához?
- Roland Schmidt ellenpéldát mutatott arra, hogy $L(G \times G)$ mindig meghatározná a csoportot. Igaz-e, hogy valamely magasabb hatvány hálója már meghatározó?
- Ha nem, mutassunk ellenpéldát!
- Az eddig vizsgált csoportoknál mindig igaz volt, hogy a magasabb hatvány hálója legalább annyi információt adott, mint az alacsonyabb hatványé. Vajon igaz-e (esetleg bizonyos megszorításokkal), hogy $L(G^n)$ meghatározza $L(G^k)$-t $(k \leq n)$?

Első célkitűzésem a téma alapos megismerése volt. Annak ellenére, hogy ez egy viszonylag kevéssé kutatott határterület, sok információt kellett összegyüjtenem. Erre feltétlenül szükség volt, hiszen a jövő megismeréséhez mindig alapvető a múlt alapos ismerete, és ez a matematikában sincs másképp. Így hát a második fejezet után, ahol a felhasznált elméleti hátteret foglaltam össze, szükséges volt csokorba szedni a téma eddigi legfontosabb eredményeit. Természetesen egy ilyen munka keretein belül nem törekedhettem a teljességre, de igyekeztem legalábbis a témámhoz legszorosabban kapcsolódó részről áttekintést adni.

Ezután már kezd körvonalazódni, hogy merre lehet, merre érdemes továbblépni. Lehetne továbbmenni a speciális csoportosztályok felé, de úgy éreztem, célravezetőbb teljes általánosságban vizsgálódni. Átugrottam tehát az első három kérdést (bár az ezekkel kapcsolatos eredményeket természetesen közöltem), és arra öszpontosítottam, meghatározzák-e a magasabb hatványok az alacsonyabbakat. Látni fogjuk, hogy ennek vizsgálatához rendkívül fontos segédeszközt nyújt a moduláris részcsoportok, kvázinormálosztók és normálosztók vizsgálata.

A negyedik fejezetben tehát az ezekkel kapcsolatos eddigi erdeményeket foglalom össze, majd ezek segítségével bebizonyítok néhány állítást (ezek közül a legfontosabb az, hogy ha a normálosztókat is kijelöljük, akkor már le tudjuk olvasni a magasabb hatványok hálójából az alacsonyabbak hálóját).

Az utolsó fejezetben pedig összefoglalom a dolgozatot és összegzem további kutatási céljaimat.

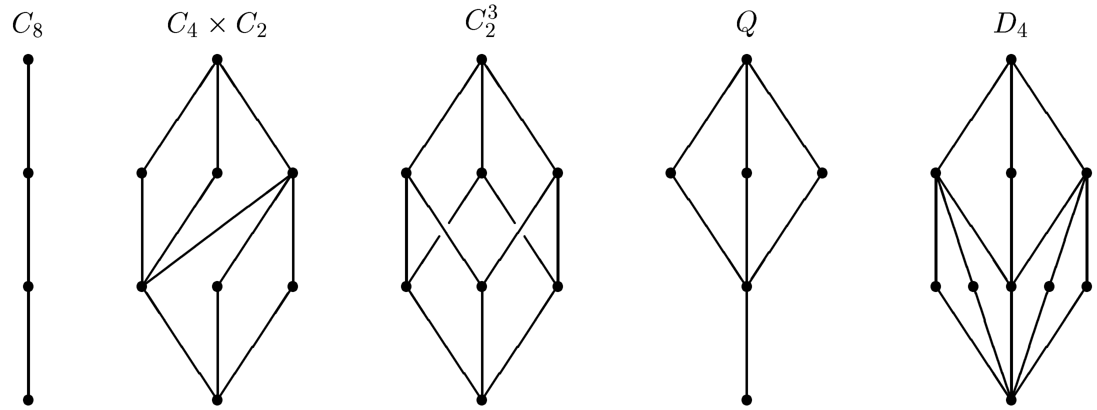
2. fejezet

Elméleti alapok

Ebben a fejezetben a felhasznált elméleti alapokat foglaljuk össze. Jelölje $L(G)$ egy G csoport részcsoportjainak hálóját, azaz azt a (teljes) hálót, amelyben az elemek (G részcsoportjai) tetszőleges adott $\{H_i : i \in I\}$ halmazának legnagyobb alsó korlátja a metszetük, legkisebb felső korlátja pedig az általuk generált részcsoport. A hálóműveleteket a $\wedge$ és $\vee$ jelekkel írjuk. Ezt a hálót a csoport *részcsoporthálójának* (vagy röviden a csoport hálójának) hívjuk. Egy elemet *kompaktnak* nevezünk, ha minden fedéséből kiválasztható véges fedés. Egy hálót *algebrainak* hívunk, ha minden eleme előáll kompakt elemek egyesítéseként. Nyilvánvaló, hogy minden részcsoportháló algebrai. A háló legkisebb elemeit (amelyet csak önmagával lehet lefedni) *atomoknak* hívjuk. Jelen esetben az atomok pont a prímrendű elemek által generált ciklikus részcsoportok lesznek.

Általában véges csoportokról lesz szó. Ha a csoport véges, akkor a hálója is véges, és a szokásos módon - *Hasse-diagrammal* - jelölhetjük: itt a legalsó elem a csoport egységeleme, a legfelső elem maga a csoport és akkor kötünk össze két részcsoportot, ha az egyik (az alsó) maximális részcsoport a másikban. A 2.1-es ábrán erre mutatunk példát.

A csoport centrumát $Z(G)$, a kommutátorát G', a normálosztót a szokásos $N \lhd G$ jelöli. Ha $H \leq G$ (azaz H részcsoportja G-nek), akkor $N_G(H)$ jelöli H normalizátorát, $C_G(H)$ pedig H centralizátorát G-ben. Két elem kommu-



2.1. ábra. A 8 elemű csoportok részcsoporthálói

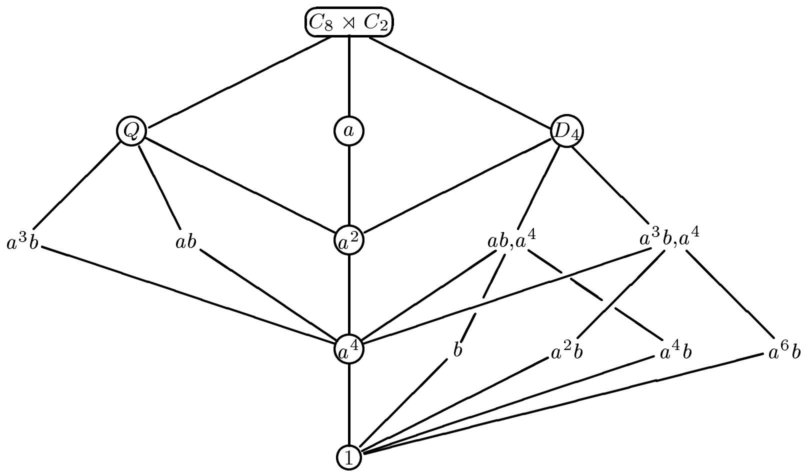
tátorát $[x, y]$-nak írjuk, valamint a szokásos $x^y = y^{-1}xy$ jelölést használjuk a konjugálásra ($x, y \in G$). A csoport automorfizmus-csoportját $Aut\, G$, normáját $Norm\, G$ jelöli (ez a normalizátorok metszete). D_n jelöli a $2n$ rendű diéder-csoportot, C_n az n rendű ciklikus csoportot, C_p^n pedig a p^n rendű elemi Abel-csoportot.

Azt mondjuk, hogy G az N normálosztója és H részcsoportja *szemidirekt szorzat*ára bomlik, ha $G = HN$, $N \cap H = 1$. Ekkor azt írjuk, hogy $G \cong N \rtimes H$. Ez megadható a H és az N csoportokkal, valamint egy $\varphi : H \to Aut\, N$ homomorfizmussal, amely H elemeinek N-en konjugálással való hatását definiálja.

Bevezetünk néhány új jelölést is. A szokásostól némiképp eltérően G^n a G csoport n-edik direkt hatványát fogja jelölni. $LN(G)$-vel fogjuk jelölni azt a struktúrát, amely G részcsoporthálójából, valamint e háló azon pontjainak halmazából áll, amelyhez tartozó részcsoportok normálosztók a csoportban. Két ilyen struktúrát izomorfnak tekintünk, ha a két háló között van olyan izomorfizmus, amely normálosztót normálosztóba visz. Ábránkon a

$$G \cong C_8 \rtimes C_2 \cong \left\langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, a^b = a^3 \right\rangle \tag{2.1}$$

csoport hálója látható, a normálosztókat is jelöltem. Az áttekinthetőség kedvéért a csúcsokon csak a részcsoportok generátorait soroltam fel.



2.2. ábra. Példa $LN(G)$-re, a normálosztókat kör jelzi

Azt mondjuk, hogy $L(G^n)$ (izomorfiától eltekintve) *meghatározza* G-t ($L(G^k)$-t), ha $L(G^n) \cong L(H^n)$-ből $G \cong H$ (illetve $L(G^k) \cong L(H^k)$) következik. Erre néhol az $L(G^n)$-ből *leolvasható* G kifejezést használjuk.

Azt mondjuk, hogy P *kvázinormális részcsoport* (vagy *kvázinormálosztó*) G-ben, ha G minden részcsoportjával felcserélhető, azaz ha minden $H \leq G$ esetén $PH = HP$. Kvázinormális csoportok tetszőleges egyesítése és minden konjugáltja is az. Fontos továbbá tudni, hogy egy $L(G \times G)$-ből menő hálóizomorfizmus kvázinormális részcsoportot mindig kvázinormálisba visz. Ez igaz az összes nagyobb hatványra is, $L(G)$-re viszont még nem, amint azt a standard ellenpéldánkból látni fogjuk. (lásd 3.1-es ábra)

Szelet-tételnek fogom hívni a következő, jól ismert tételt, amely a direkt szorzat részcsoportjait írja le.

2.1. Tétel. *$G_1 \times G_2$ részcsoportjai felírhatóak, mint a két részcsoport egy-egy szelete között menő izomorfizmus grafikonja. Vagyis H pontosan akkor részcsoportja $G_1 \times G_2$-nek, ha léteznek $N_1 \lhd H_1 \leq G_1$ és $N_2 \lhd H_2 \leq G_2$ részcsoportok és*

$$\varphi : H_1/N_1 \to H_2/N_2 \tag{2.2}$$

izomorfizmus, hogy

$$H = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in H_1, g_2 \in H_2, (g_1N_1)\varphi = g_2N_2\} \tag{2.3}$$

A bizonyítást annak trivialitása miatt nem mellékelem. A továbbiakban az ilyen H részcsoport leírására a

$$H \sim H_1/N_1 \to H_2/N_2 \tag{2.4}$$

jelölést fogjuk használni, ha szükséges, a konkrét φ izomorfizmus megnevezésével. Később majd ábrán bemutatjuk, hogy az itt szereplő részcsoportok hogyan találhatóak meg a hálóban.

A munka során leginkább a hálók legalapvetőbb tulajdonságait használjuk. Egy háló modularitására több ekvivalens definíció is van. Az L háló *moduláris*, ha tetszőleges X, Y, Z elemeire teljesül a *Horn-formula*:

$$X \geq Z \Rightarrow (X \wedge Y) \vee Z = X \wedge (Y \vee Z). \tag{2.5}$$

Mivel a formula bal oldala sohasem nagyobb a jobb oldalánál, ugyanezt egyenlőtlenségként is megfogalmazhatjuk:

$$X \geq Z \Rightarrow (X \wedge Y) \vee Z \geq X \wedge (Y \vee Z). \tag{2.6}$$

Megjegyezzük továbbá, hogy az $X \geq Z$ feltétel elhagyható, ha Z-t $X \wedge Z$-vel helyettesítjük, így nyerhetjük a *moduláris szabályt*:

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) = X \wedge (Y \vee (X \wedge Z)). \tag{2.7}$$

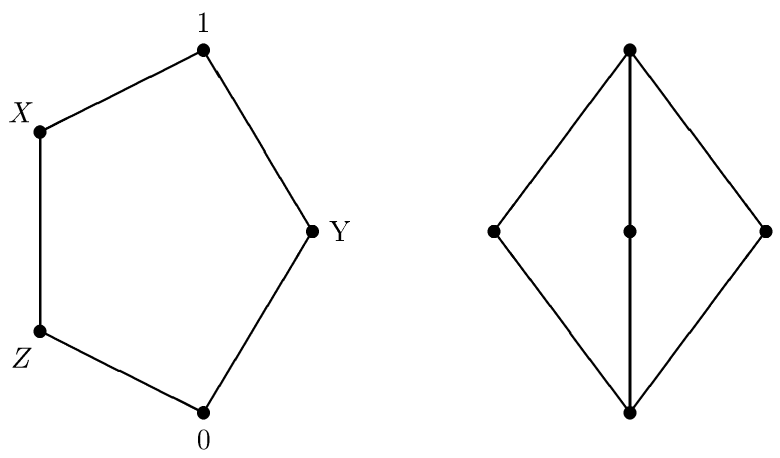
Újabb ekvivalens definíciót kapunk, ha észrevesszük, hogy egy háló akkor és csak akkor moduláris, ha nem tartalmazza részhálóként N_5-öt. (2.3-as ábra)

A moduláris szabályt Dedekind fedezte fel 1877-ben, amikor a komplex számok additív csoportjának részcsoporthálóját vizsgálta. Egy csoport normálosztói mindig moduláris hálót alkotnak. Kommutatív csoportok részcsoporthálója mindig moduláris, de vannak moduláris hálóval rendelkező nem kommutatív csoportok is, amint azt később látni fogjuk. Az L háló egy elemét *moduláris*nak nevezzük, ha nem állhat a modularitás definíciójában szereplő ötszög jobb oldalán, vagy a bal oldal alján (nem veheti fel Y vagy Z szerepét). Érdemes megjegyezni, hogy a részcsoporthálóban a csoport normálosztói (és mint később látni fogjuk, a kvázinormálosztói is) mindig moduláris elemek. G-t a továbbiakban *moduláris csoportnak* nevezünk, ha $L(G)$, mint háló moduláris.

További fontos hálótulajdonság a disztributivitás. Nem használjuk majd gyakran, mivel a disztributív hálóval rendelkező csoportok könnyen leírhatóak, amint azt később, a 3.1 tételben látni fogjuk. *Disztributív*nak nevezünk egy L hálót, ha minden $x, y, z \in L$ esetén

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{2.8}$$

teljesül, természetesen dualizálással ekvivalens definíciót kapunk. Végül ekvivalens megfogalmazáshoz jutunk akkor is, ha megtiltjuk L-ben N_5 és M_3 mint részhálók jelenlétét. (2.3.ábra)



2.3. ábra. A tiltott hálók - N_5 és M_3

3. fejezet

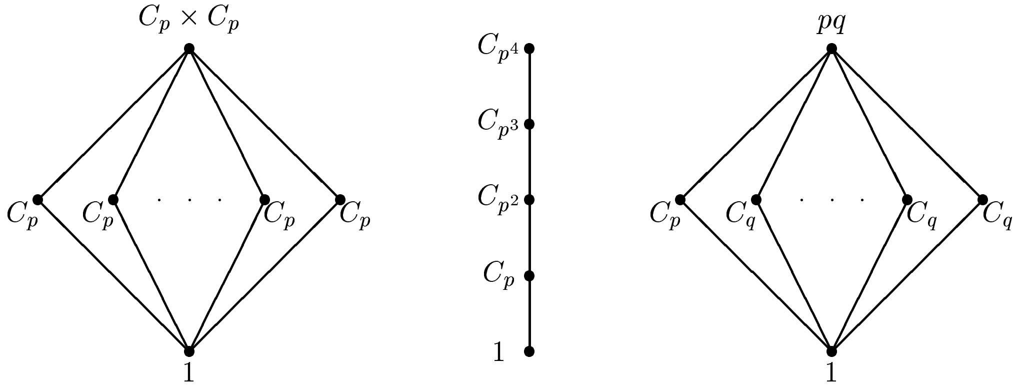
Főbb meghatározottsági eredmények

3.1. Meghatározottság a részcsoportháló által

Az első kérdés az, G-t meghatározza-e $L(G)$. A válasz természetesen nemleges. Két ellenpéldaosztályt mutatunk (bár természetesen jóval több van). Az első példához elég észrevenni, hogy egy prímhatványrendű ciklikus csoport hálója egyszerűen egy $n+1$ hosszú lánc lesz. A második példa kevésbé triviális. Legyen az egyik csoport $C_p \times C_p$ (prímnégyzet rendű elemi Abel-csoport), a másik pedig a pq rendű nem kommutatív csoport (p, és q prímek, $q \mid p-1$). Mindkét példánk részcsoporthálója a 3.1.ábrán található. Ez utóbbi hálót szokták M_{p+1}-nek is nevezni, ez egy gyakori ellenpélda.

Nézzük először, mi látszik $L(G)$-n. Természetesen véges csoport hálója véges (és fordítva), azaz a végesség igen. Kiderül, hogy a lokális ciklikusság (vagy véges esetben a ciklikusság) is megőrződik részcsoporthálók közti izomorf leképezés során. A következő, még Ore-tól származó tétel szerint ugyanis pont ezeknek lesz disztributív a hálója. [SU, 3-4.oldal]

3.1. Tétel. *G részcsoporthálója akkor és csak akkor disztributív, ha minden végesen generált részcsoportja ciklikus.*



3.1. ábra. $C_p \times C_p$, C_{p^4} és $C_p \rtimes C_q$ részcsoporthálója

3.2. Következmény. *Ha G véges ciklikus csoport és $L(G)$ izomorf $L(H)$-val, akkor H is véges ciklikus csoport.*

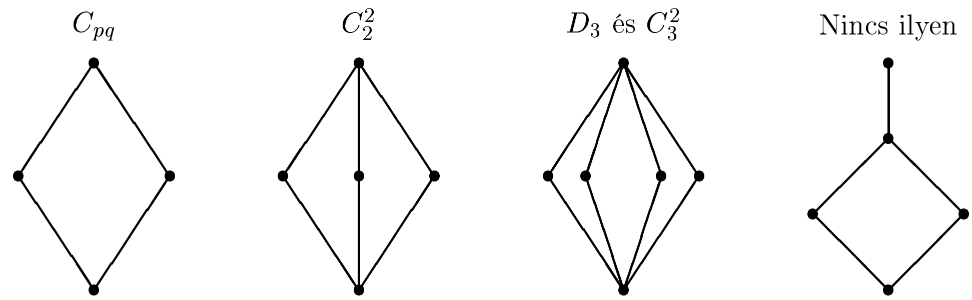
Azaz a ciklikusság leolvasható, a ciklikusak viszont egymástól már nehezen megkülönböztethetőek. Az előbb láttuk, hogy az összes egyforma magas prímhatványrendű csoportnak ugyanolyan a hálója, ezek pedig végtelen sokan vannak. Ha viszont a csoport nem tartalmaz ciklikus faktort, akkor más a helyzet, amint ezt a következő tétel is mutatja. [SU, 51.oldal]

3.3. Tétel. *Ha egy háló direkt felbontásában nincs lánc, akkor csak legfeljebb véges sok páronként nem izomorf csoportnak lehet a részcsoporthálója.*

Általánosságban ennél nem mondhatunk sokkal többet, a következő ábrán ugyanis láthatjuk, van olyan háló, amihez végtelen sok, pontosan egy, néhány, illetve egy csoport sem tartozik. [PPP, 3.oldal]

Természetes kérdés, hogy mi a kapcsolat a csoport illetve a részcsoporthálójának direkt felbontása között.

3.4. Tétel. *Az $L(G)$ részcsoportháló akkor és csak akkor bomlik az L_i $(i \in I)$ hálók direkt szorzatára, ha G is felbomlik G_i részcsoportok direkt szorzatára, amelyekre teljesül, hogy a különböző tényezők elemeinek rendje véges és relatív prím egymáshoz, valamint hogy $L(G_i) \cong L_i$, minden $i \in I$ esetén.*



3.2. ábra. Négy háló és a hozzájuk tartozó csoport(ok)

Ez sok tekintetben egyszerűsíti a dolgunkat, hiszen általában elég csak a direkt felbonthatatlan részcsoporthálókkal foglalkozni. [SU, 3.oldal]

Szintén hasznos lehet a Remak–Krull–Schmidt tétel, amely szerint egy direkt szorzat komponensei sorrendtől és izomorfiától függetlenül egyértelműek. Ennek következménye, hogy véges csoportok és a direkt négyzetük egyszerre izomorfak.

A következő vizsgált tulajdonság a kommutativitás. Kommutatív csoport részcsoporthálójáról tudjuk, hogy moduláris (mivel minden részcsoport normálosztó). Ennek ellenére ez a tulajdonság nem őrződik meg hálóizomorfizmus esetén (lásd a már ismert p^2 és pq rendű példánkat), sőt, a képcsoportnak még nilpotensnek sem kell lennie. A kommutatív és a moduláris csoportok további vizsgálatával azonban megtalálhatjuk közöttük azokat, amelyeket részcsoporthálójuk meghatároz. Lukács Erzsébet mindkét esetben szükséges és elégséges feltételt ad. [LU, 14.oldal]. Ezután további meghatározottsági eredményeket mutatunk.

3.5. Tétel. *Minden lokálisan szabad csoportot meghatároz a részcsoporthálója. Ha ez a csoport nem ciklikus, akkor még az is igaz, hogy tetszőleges, a csoportból menő háló-izmorfizmust csoport-izomorfizmus indukál.*

Sadovsky ezt a tételét később kiterjesztette valódi szabad szorzatokra: belátta, hogy tetszőleges valódi szabad szorzatot meghatároz a részcsoporthálója.

Jones szükséges és elégséges feltételt adott arra, mikor lesz két csoportnak azonos a részcsoporthálója. [SU, 36-38.oldal]

A hálóizmorfizmusok normálosztókra vett hatásának vizsgálatával bizonyítja könyvében Suzuki a következő tételeket.

3.6. Tétel. *Ha G véges, perfekt csoport, és $L(G) \cong L(H)$, akkor H is véges perfekt csoport.*

3.7. Tétel. *Ha G véges, feloldható csoport, és $L(G) \cong L(H)$, akkor H is véges feloldható csoport.*

Volt már szó az egyszerű csoportokról. Suzuki bebizonyította, hogy az egyszerűség is megőrződik.

3.8. Tétel. *Ha G véges, nem kommutatív, egyszerű csoport, és $L(G) \cong L(H)$, akkor H is az.*

Sőt, az egyszerű csoportok klasszifikációjának felhasználásával az is következik, hogy az egyszerű csoportokat is meghatározza a részcsoporthálójuk. Ennél is fontosabb viszont, hogy a 4.16 tételéhez hasonló ötlettel egy erős meghatározottságot bizonyított véges egyszerű csoportok direkt négyzetére.

3.9. Tétel. *Ha G véges, nem kommutatív, egyszerű csoport, akkor*

$$L(G \times G) \cong L(H) \Longrightarrow G \times G \cong H. \tag{3.1}$$

Ez jóval erősebb eredmény annál, mintha csak azt állítanánk, hogy a direkt négyzet részcsoporthálója meghatározza a csoportot. Később (lásd 3.13 tétel) látni fogjuk ugyanis, hogy kommutatív csoportok esetén a direkt négyzet részcsoporthálója meghatározza a csoportot:

$$L(G \times G) \cong L(H \times H) \Longrightarrow G \cong H. \tag{3.2}$$

De ha $G \cong C_p$ és H a szokásos nem kommutatív, pq rendű csoportunk, akkor a (3.1) implikáció bal oldala igaz, jobb oldala viszont nem. Később Roland Schmidt általánosította a fenti tételt. [PPP, 22.oldal]

3.10. Tétel. *Ha G véges, $G' = G$, $Z(G) = 1$, akkor $L(G \times G) \cong L(H) \Rightarrow G \times G \cong H$.*

Itt érdemes megjegyezni, hogy a csoport fontos részcsoportjai általában nem őrződnek meg hálóizomorfizmus esetén. A centrum képe nem biztos, hogy centrum, és a kommutátor képe sem feltétlenül kommutátor, már csak azért sem, mert kommutatív csoport esetén ezek triviálisak, de kommutatív csoport képe nem mindig kommutatív. Megőrződik a Frattini-részcsoport (a maximális részcsoportok metszete) és a csoport talpa (a minimális részcsoportok által generált részcsoport).

3.2. Meghatározottság a direkt négyzetben

Miért vizsgáljuk egyáltalán a direkt négyzet részcsoporthálóját? Elsősorban azért, hogy több információt szerezzünk a struktúráról. $L(G)$ nem elég beszédes, és jó okunk van azt hinni, hogy minél nagyobb direkt hatványt vizsgálunk, egyre több látszik G-ből. Azt találtuk, hogy bizonyos speciális csoportosztályokra a háló meghatározza a csoportot, de ezek az osztályok kicsik, és sok az ellenpélda. Tovább kell lépni valamilyen irányba.

Az egyik lehetőség, hogy szorosabbra fonjuk a két struktúra kapcsolatát. Megtehetjük például, hogy kijelölünk a hálóban bizonyos speciális részcsoportokat, és megnézzük, jobb eredményt kapunk-e. Amint az majd kiderül, ígéretes lehetőség a normálosztók kijelölése. Később igazolom majd, hogy $LN(G)$-ből már leolvasható a csoport kommutativitása. (lásd 4.18 tétel)

A másik lehetőség, hogy a csoport belső szerkezetét próbáljuk jobban megjeleníteni. Erre szolgál az a módszer, hogy a részcsoportháló helyett a direkt négyzet részcsoporthálóját vizsgáljuk. Ki fog derülni, hogy ekkor már sokkal több minden látszik, és nem is véletlenül. Ennek alapvető oka az, hogy $L(G \times G)$-ben ott van G két példányban is (mint normálosztó), és mivel az összes részcsoportról szó van, G elemeinek, részcsoportjainak a kapcsolata is megjelenik, és úgy tűnik, hogy több információt kaptunk.

Az, hogy az információnk valóban több, sajnos még nem bizonyított, de nagyon igaznak látszik. Egész pontosan azt szeretnénk igazolni, hogy $L(G \times G)$ már meghatározza $L(G)$-t. Még tágabban fogalmazva, munkánkat motiváló egyik fő cél belátni, hogy a nagyobb direkt hatványok meghatározzák a kisebbeket. Világos, hogy $L(G)$ ott van valahol $L(G \times G)$-ben, de nem is olyan egyszerű azt megtalálni.

Két esetben lehet könnyű a dolgunk. Az egyik az, ha a csoportnak kevés részcsoportja, normálosztója van, nehezen felbontható. Ekkor ugyanis $L(G)$ nehezen tud elbújni.

A másik eset az ellenkező véglet, amikor majdnem minden részcsoport, vagy legalábbis nagyon sok részcsoport normálosztó (ilyenek a moduláris csoportok és az Abel-csoportok). Azt már eddig is láttuk, hogy az egyszerű csoportok esetén a direkt négyzet hálója már meghatározó szerepű, azt pedig látni fogjuk, hogy a kommutatív, sőt a moduláris csoportok esetén is.

Kezdetnek megemlítjük, hogy a direkt négyzet hálójában már látszik az elemek rendje. Kiderül ugyanis, hogy a prímrendű részcsoportok (ezek egyébként a háló atomjai) rendje leolvasható, és ebből a p-Sylowok, majd tetszőleges részcsoport (és így persze tetszőleges elem) rendje is. Ennek az az alapvető oka, hogy minden prímrendű elemhez található vele felcserélhető, ugyanakkora rendű elem, és pont az ilyen atomok fognak együtt egy M_{p+1}-et generálni a hálóban. [LU, 5.oldal]

3.11. Tétel. *Legyenek G és H véges csoportok, valamint $L(G \times G) \cong L(H \times H)$. Ekkor $|G| = |H|$, valamint ha $\varphi : L(G \times G) \to L(H \times H)$ izomorfizmus, akkor $|\varphi(X)| = |X|$ minden $X \leq G \times G$ esetén.*

Ez a tétel mutatja, hogy a direkt négyzetben nagyobb szabadságunk van megfelelően viselkedő elemek választásában, és hogy ez valóban fel is használható, méghozzá egyszerűen és elegánsan.

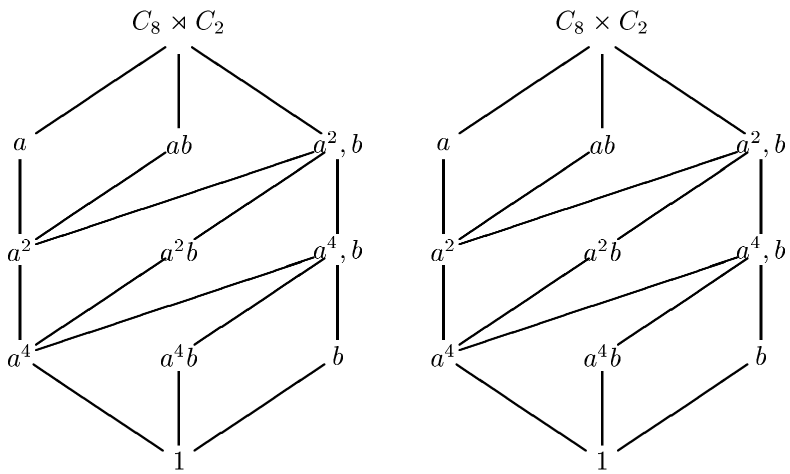
Fontos kérdés, hogy mit mondhatunk a kommutatív csoportokról, hiszen itt már $L(G)$ esetén is vannak eredmények. Nyilvánvaló, hogy ha G kommutatív, akkor $L(G \times G)$ moduláris. Az az érdekes, hogy ez visszafele is igaz, vagyis a kommutativitást a direkt négyzet hálójából már felismerhetjük. A bizonyítás konkrét, jól választott részcsoportokat vesz és használja rájuk a moduláris azonosságot.

3.12. Tétel. *G akkor és csak akkor kommutatív, ha $L(G \times G)$ moduláris.*

Ezután már könnyen beláthatjuk, hogy a véges kommutatív csoportokat a részcsoporthálójuk direkt négyzete meghatározza, ugyanis két olyan csoport, amelyek négyzetének izomorf a részcsoporthálója, egyszerre kommutatív, és (mivel a rendeket is ismerjük) könnyen ellenőrizhető, hogy pontosan ugyanazokból a direkt faktorokból állnak. [LP]

3.13. Tétel. *Legyen G véges Abel-csoport. Ha $L(G \times G) \cong L(H \times H)$ (valamilyen H csoportra), akkor $G \cong H$.*

Ezután egy hosszú, fáradságos bizonyítással ez kiterjeszthető egy tágabb csoportosztályra, a moduláris csoportokra is. Az esetek nagy része könnyen elintézhető, de marad egy, az úgynevezett kvázi-Abel p-csoportok esete (egyébként ezek arról ismertek, hogy a részcsoporthálójuk egy Abel p-csoport részcsoporthálójával izomorf), amellyel sokkal többet kell foglalkozni. [LU]



3.3. ábra. Egy Abel-csoport és a vele izomorf hálójú kvázi-Abel csoport

Az ábrán a $G \cong \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, a^b = a^5 \rangle$, valamint a $H \cong C_8 \times C_2$ csoportok hálóját láthatjuk.

3.14. Tétel. *Legyen G véges, moduláris csoport. Ha $L(G \times G) \cong L(H \times H)$ (valamilyen H csoportra), akkor $G \cong H$.*

3.3. Két ellenpéldaosztály

Teljes általánosságban nem igaz, hogy a direkt négyzet részcsoporthálója meghatározná a csoportot. Roland Schmidt ugyanis talált egy ellenpéldaosztályt. Ada Rottländer vezette be 1928-ban a következő csoportokat:

Legyenek p és q olyan prímek, hogy $q \mid p - 1$. Ha q legalább 5, akkor van olyan $r \not\equiv 1 \pmod{p}$, amelyre $r^q \equiv 1 \pmod{p}$. Legyen $\lambda \in \{2, \ldots, q-1\}$, és definiáljuk az

$$R_\lambda = \left\langle x, y, a \mid x^p = y^p = a^q = [x, y] = 1, x^a = x^r, y^a = y^{r^\lambda} \right\rangle \qquad (3.3)$$

Rottländer-csoportot. Ezeknek a csoportoknak megegyezik a részcsoporthálójuk, sőt Roland Schmidt azt is észrevette, hogy a direkt négyzetük hálója is megegyezik, viszont két ilyen csoport általában nem izomorf. [RS]

3.15. Példa. *Mindig igaz, hogy $L(R_\lambda \times R_\lambda) \cong L(R_\mu \times R_\mu)$, de R_λ és R_μ csak akkor izomorfak, ha $\lambda \equiv \mu(q)$, vagy $\lambda\mu \equiv 1(q)$.*

Sokáig csak ez az egy ellenpéldaosztály volt ismeretes a direkt négyzet hálója általi meghatározottságra. Csak nemrég derült ki, hogy más ellenpéldák is vannak, méghozzá már nagyon régóta. 1967-ben Suzuki egyik tanítványa, Anne Penfold Street a doktori disszertációjában (több egyéb dolog mellett) az úgynevezett részcsoport-definiáló függvényekről is írt. Ez a rész külön cikként is megjelent. A cikk végén, példaként mutat két csoportot, $G(m, n)$-t és $G(m^2, n)$-t, amelyek nem izomorfak ugyan, de az egyik művelete a másikba vihető úgy, hogy ez garantálja, hogy a részcsoportok (és még sok más egyéb dolog is) pontosan ugyanúgy helyezkednek el. Rövid érveléssel belátható, hogy ez a két csoport direkt hatványaira is igaz lesz, tehát a két csoportra teljesül az $L(G(m,n)^k) \cong L(G(m^2,n)^k)$ állítás tetszőleges k kitevő esetén. Vagyis az a sejtés, hogy valahányadik direkt hatvány hálója (esetleg már a köbé is) meghatározná a csoportot, nem igaz.

Nézzük ezt egy kicsit részletesebben. Legyen G egy csoport, S egy tetszőleges részhalmaza. Tudjuk, hogy S pontosan akkor részcsoport, ha tetszőleges $x, y \in S$ esetén $f(x,y) = xy^{-1}$ is benne van S-ben. Vagyis S részcsoportságát az határozza meg, hogy zárt-e egy függvényre (másképpen: egy kétváltozós műveletre).

A továbbiakban egy G csoportot *P-tulajdonságúnak* hívunk, ha értelmezhető rajta egy új kétváltozós művelet ($x \circ y$), amely kifejezhető egy x-ből és y-ból álló szóval, G az új műveletre csoportot alkot (amelyet $G_\circ$-el jelölünk), valamint a régi művelet, xy is kifejezhető az új csoportban alkotott szóval. A $G_\circ$ csoportban a hatványozást $[x]_\circ^m$, az inverzt $x^{[-1]}$, a kommutátort pedig $[y,x]_\circ$ jelöli.

Ekkor az új művelettel alkotott $f(x,y) = x \circ y^{[-1]}$ függvényre zártnak kell lennie G részcsoportjainak. Ez a függvény nem lehet triviális (vagyis xy^{-1} jellegű). Az két csoport közti ilyen leképezést (itt $x \circ y$-t) *s-függvénynek* szokták nevezni. A szerző a munkájában ilyen csoportok leírásával foglalkozik, valamint kimond egy tételt G és $G_\circ$ kapcsolatáról. [APS]

3.16. Tétel. *Legyen G P-tulajdonságú, és legyen $G_\circ$ a belőle alkotott csoport. A két csoport közti természetes leképezés megőrzi az egységelemet, az elemek inverzét, rendjét és hatványait, tetszőleges részcsoport rendjét és exponensét, a csoport részcsoporthálóját, tetszőleges részcsoport kommutátorát és normalizátorát, tetszőleges két részcsoport kommutátorát, valamint minden elem centralizátorát. Továbbá az s-függvénynek az $x \circ y = xy \prod_i u_i^{f_i}$ alakúnak kell lennie, ahol ha $H = \langle x, y \rangle$,akkor $u_i \in H'$.*

A cikk végén a szerző több példát is mutat. Az egyik számunkra különösen érdekes. Legyenek $p \equiv 1(3)$, $q \equiv 1(3)$, $p \equiv 1(q)$ prímek, legyen továbbá adott $m \not\equiv 1(p)$, $m^3 \equiv 1(p)$, $n \not\equiv 1(q)$, $n^3 \equiv 1(q)$. Definiáljuk a következő csoportot:

$$G(m,n) = \langle s, t, u \mid s^p = t^q = [s,t] = 1, s^u = s^m, t^u = t^n \rangle \tag{3.4}$$

Tudjuk, hogy ha m rögzített, akkor $G(m,n) \cong G(m,n^2)$, valamint könnyen ellenőrizhető, hogy ha viszont n-t rögzítjük, akkor $G(m,n) \ncong G(m^2,n)$.

3.17. Példa. *Az előző feltételek mellett $G(m,n) \ncong G(m^2,n)$, de tetszőleges x kitevő esetén igaz az $L((G(m,n))^k) \cong L((G(m^2,n))^k)$ állítás, azaz - másképpen fogalmazva - bármilyen nagy direkt hatványt is veszünk, annak részcsoporthálója nem határozza meg a csoportot.*

Bizonyítás: Jelöljük most $G(m,n)$-t röviden G-vel és definiáljuk a következő műveletet: $x \circ y = xy[y,x]^k$. Ez pontosan akkor lesz asszociatív, ha $k(k-1) \equiv 0(pq)$, azaz a $k = 0, 1, p, 1-p$ esetben kaphatunk s-függvényt. Ebből számunkra a $k = 1-p$ eset az érdekes. Az ekkor kapott műveletre G nyilvánvalóan csoportot alkot (már csak az inverz létezését kell bizonyítani, az pedig ugyanaz marad, hiszen $[x, x^{-1}] = 1$).
A definícióból világos, hogy G generátorai az új csoportnak is generátorai lesznek, valamint az is, hogy $N = \langle s,t \rangle_\circ \cong C_p \times C_q$ (hiszen s és t rendje továbbra sem változik, és kommutálni fognak) és $H = \langle u \rangle_\circ \cong C_3$ részcsoportot alkotnak $G_\circ$-ben. Ahhoz, hogy $G_\circ$ felírható legyen ezek szemidirekt szorzataként, már csak azt kell belátni, hogy $N \lhd G_\circ$ ($G = NH$ és $N \cap H = 1$ nyilván igaz). Ehhez elég kiszámolni az $[s]_\circ^u$ és a $[t]_\circ^u$ konjugáltakat. Hosszú, de triviális számolás után azt kapjuk, hogy $[s]_\circ^u = s^{m^2}$, $[t]_\circ^u = t^n$. Kiderült tehát, hogy $G_\circ = N \rtimes H$, ráadásul pont ugyanazok a részcsoportok és a konjugálással való hatás, tehát $G_\circ \cong G(m^2,n)$.

Van tehát két csoportunk, amelyek ugyan nem izomorfak, de egy s-függvény köti össze őket. Könnyen látható, hogy a direkt hatványok között is ugyanígy definiálhatunk s-függvényt. Ebből viszont az következik, hogy a direkt hatványok részcsoporthálója mindig megegyezik (a részcsoportok a két csoportot összekötő művelet miatt ugyanott vannak). Állításunkat tehát beláttuk. $\square$

Fontosnak megjegyezni, hogy egyik ellenpélda sem cáfolja annak lehetőségét, hogy a magasabb hatványok több információval szolgálnak. Az első példa esetén az első és a második hatványok is izomorfak, ez utóbbiban pedig mind azok.

4. fejezet

Moduláris részcsoportok

4.1. Bevezetés

Amint az előző fejezetekben is láthattuk, fontos kérdés a részcsoportháló moduláris elemeinek vizsgálata. Ez a tulajdonság könnyen ellenőrizhető. Mi alapvetően háromféle moduláris elemet különböztetünk meg, a normálosztókat, a kvázinormálosztókat és azokat, amelyek egyik előbbi kategóriába sem esnek. Ezek kapcsolatát tisztázza a következő két egyszerű állítás.

4.1. Állítás. *Ha N normálosztó G-ben, akkor kvázinormálosztó is.*

4.2. Állítás. *Ha P kvázinormálosztó G-ben, akkor (G részcsoporthálójában) moduláris elem.*

Maradjunk továbbra is ezen tulajdonságok egymáshoz való viszonyánál. Ore következő tétele elégséges feltételt ad arra, hogy egy kvázinormálosztó normális is legyen. [SU, 7.oldal]

4.3. Tétel. *Ha N maximális kvázinormálosztó G-ben, akkor $N \lhd G$.*

Egy csoportot *kvázi-Hamilton*-félének nevezünk, ha minden részcsoportja kvázinormális. Érdemes itt megjegyezni Iwasawa tételét is.

4.4. Tétel. *Egy véges csoport pontosan akkor kvázi-Hamilton-féle, ha nilpotens, és minden Sylow-részcsoportja moduláris csoport.*

Azt mondjuk, hogy az U és V részcsoportok *moduláris párt* alkotnak, ha $W \geq U$ esetén $(W \wedge V) \vee U = W \wedge (V \vee U)$ és $W \geq V$ esetén $(W \wedge U) \vee V = W \wedge (U \vee V)$. Ez azzal ekvivalens, hogy U és V nem állhat N_5 két oldalának az alján. Ez általában nem garantálja a két részcsoport felcserélhetőségét, igaz viszont a következő tétel:

4.5. Tétel. *Legyen G véges csoport. Pontosan akkor lesz tetszőleges moduláris pár felcserélhető is egyben, ha G nilpotens.*

Ebből következik, hogy ha a csoport nilpotens, akkor minden moduláris elem kvázinormális.

4.6. Tétel. *H pontosan akkor normálosztó $G_1 \times G_2$-ben, ha a szelet-tételben szereplő összes részcsoport normálosztó (G_1-ben illetve G_2-ben), valamint még az is igaz, hogy $H_i/N_i \leq Z(G_i/N_i)$*

Bizonyítás: Nyilván elég a G_1 csoportra való vetítéssel foglalkozni. A G_2-re vonatkozó állítások pontosan ugyanígy láthatóak be. A szelet-tétel jelöléseit fogom használni.
Szükségesség: Ahhoz, hogy H normálosztó legyen, az kell, hogy $G_1 \times G_2$ tetszőleges elemével való konjugálás helyben hagyja. Egy ilyen részcsoportot egyértelműen meghatároz a két vetülete, a vetületek magjai és a szeletek között menő izomorfizmus, ezeknek kell tehát változatlannak maradniuk.
Mivel a konjugálás külön-külön hat a direkt komponenseken, nyilván szükséges, hogy H_1 normálosztó legyen G_1-ben. (vetületek)
N_1 nem változhat meg a G_1 elemeivel való konjugálás esetén, tehát normálosztó benne (magok).
Az izomorfizmusnak még mindig ugyanazokat az elemeket kell összekötnie. Ez azt jelenti, hogy G_1 elemeivel való konjugálás helyben kell hogy hagyja a H_1/N_1 elemeit, ha ugyanis valamely $g \in G_1$-re ez nem így lenne, akkor a $(g, 1)$ elemmel való konjugálás esetén nem kapnánk vissza az eredeti izomorfimust. Az előző feltétel pontosan azt jelenti, hogy $H_1/N_1 \leq Z(G_1/N_1)$, azaz állításunk egyik felét beláttuk.

Elégségesség: Lényegében ugyanezt kell elmondani visszafele. Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor tetszőleges $(x, y) \in G_1 \times G_2$ elemmel való konjugálás helyben hagyja a vetületeket, a magokat és az izomorfizmust is. A szelet-tétel következményeként tehát az egész részcsoportot helyben hagyja. Ez pontosan azt jelenti, hogy H normálosztó. $\square$

4.2. Kvázinormális részcsoportok

A kvázinormálosztók leginkább azért érdekelnek minket, mert a hálóban nagyon hasonlítanak a normálosztókra. A direkt négyzet részcsoporthálójában ezeket már felismerhetjük, amint a következő állítás is mutatja.

4.7. Állítás. *Legyen G tetszőleges véges csoport. $P \leq G$ pontosan akkor kvázinormálosztó, ha tetszőleges $X \leq G$-re*

$$|P \vee X|\,|P \wedge X| = |P|\,|X|\,. \tag{4.1}$$

Bizonyítás: Az, hogy P kvázinormális, azt jelenti, hogy tetszőleges részcsoporttal felcserélhető. A képlet $P \vee X$ helyett PX-re nyilván igaz, és P és X pontosan akkor felcserélhetőek, ha $|PX| = |P \vee X|$. $\square$

4.8. Következmény. *Egy $\varphi : L(G \times G) \to L(H \times H)$ izomorfizmus kvázinormálosztóhoz mindig kvázinormálosztót rendel.*

Bizonyítás: Az előző állítás alapján ugyanis a kvázinormálosztók felismerhetőek. Annyit kell csak látni, hogy a fenti rendek valóban ismertek, ezt a 3.11 tétel biztosítja. $\square$

4.9. Megjegyzés. *Természetesen a bizonyítás minden* magasabb *hatványra is működik, pontosan ugyanígy.*

Ez az, ami számunkra igazán érdekes. A 4.16 tétel és következményei szerint ugyanis ha ismerjük a normálosztókat, az alacsonyabb hatvány részcsoporthálója láthatóvá válik. Ugyan mi a normálosztókat nem ismerjük, de legalább egy tágabb halmazt, a kvázinormálosztókat igen. Ha a tétel feltételein lazítani tudnánk (normálosztókról kvázinormálosztókra), vagy a kvázinormálosztókat meg tudnánk különböztetni a normálosztóktól, akkor beláthatnánk, hogy a magasabb hatványok részcsoporthálója valóban több információt ad. Sőt, nem is kellene az összes normálosztót ismernünk, elég csak a $|G|$ rendűeket kiszűrni. Sajnos ez nem látszik egyszerű feladatnak, ugyanis a kvázinormálosztók viszonylag sokan vannak, főleg az ekkora rendűek.

Látszik viszont, hogy ezek minél behatóbb tanulmányozása sokat segíthet. $G \times G$-ben nézünk körül, és próbálunk speciális alakú kvázinormálosztókat keresni. Kézenfekvő először a $P \times 1$ alakúakat vizsgálni, és gyorsan kiderül, hogy érdemes is.

4.10. Tétel. *Ha $P \times 1$ kvázinormális $G \times G$-ben, akkor normális is.*

Bizonyítás: Először is világos, hogy P pontosan akkor normálosztó G-ben, ha $P \times 1$ normálosztó $G \times G$-ben. Legyen $g \in G$ tetszőleges. Mivel $P \times 1$ kvázinormális, minden részcsoporttal felcserélhető, így

$$(P \times 1) \langle (g, g) \rangle = \langle (g, g) \rangle (P \times 1) . \tag{4.2}$$

Ezt egy kicsit másként írva kapjuk:

$$\{(pg^i, g^i) \mid p \in P, i = 1, 2, \ldots, n\} = \{(g^i p, g^i) \mid p \in P, i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{4.3}$$

Ez nyilván csak úgy lehetséges, ha minden i-re igaz a $Pg^i{=}g^iP$ egyenlőség. Mivel g tetszőleges volt, ez azt is jelenti, hogy P a G csoport minden elemével felcserélhető, azaz normálosztó. $\square$

4.11. Megjegyzés. *Itt leginkább azt használtuk, hogy a $\langle (g, g) \rangle$ és a $P \times 1$ részcsoportok mindig diszjunktak, ez alkalmat adhat a tétel általánosítására. További észrevétel, hogy a tételben elegendő $P \times 1$ modularitását feltennünk. Ebben az esetben úgy bizonyíthatunk, mint a 4.12 tétel esetén.*

Azonnal látszik, hogy $L(G^4)$-ben biztosan normálosztók a $T \times 1 \times 1$ alakú kvázinormálosztók, a bizonyítás hasonló. Ez a triviális általánosítás esetleg hasznos lehet, mert alapot adhat arra, hogy a nagyobb hatványban legalább bizonyos, kisebb hatványba is beeső normálosztókat felismerjünk. A problémát itt persze az jelenti, hogy a nagyobb hatványban (jelen esetben $L(G^4)$-ben) még nem tudjuk megtalálni a kisebb hatványt. Ha viszont $L(G^4)$-ben valami okból megtalálnánk $L(G^2)$-et, akkor ennek segítségével már $L(G)$-t is. Az állítás $L(G^3)$ $T \times 1$ alakú normálosztóira is igaz, hiszen a tétel bizonyításában (g_1, g_2)-t is vehettünk volna, ahol a két tényező rendje megegyezik.

Mint már említettem, a kvázinormálosztók sokan vannak, másrészt pedig G^n tipikusan szintén nagyon nagy csoport. Ugyan írhatunk viszonylag könnyen programozható algoritmusokat (például GAP-ben) ezek felismerésére, de ezek csak igen kicsi csoportok esetén fognak működni. Kézzel ellenőrizhető eseteket érdemes vizsgálni, így fordulunk a diagonális, $H_1 \to H_2$ típusú részcsoportok felé. Ezek között az alábbi állítás miatt általában nem lesz sok kvázinormális elem, másrészt pedig ezek között a 4.6 tétel miatt igen könnyen megtalálhatjuk a normálosztókat.

4.12. Tétel. *Ha $H_1 \to H_2$ moduláris részcsoport $G \times G$-ben, akkor H_i elemei G tetszőleges részcsoportját önmagába konjugálják.*

Bizonyítás: Legyen $T \leq G$ és $h_1 \in H_1$ tetszőleges, és vizsgáljuk a $T \times 1$ és a $H_1 \to H_2$ és a $\langle T, T^{h_1} \rangle \times 1$ részcsoportokat $L(G \times G)$-ben. Ha $\langle T, T^{h_1} \rangle$ nagyobb lenne T-nél, akkor az imént említett három részcsoport N_5-öt hozna létre $L(G \times G)$-ben. Ezt $H_1 \to H_2$ modularitása kizárja, tehát $T^{h_1} \leq T$, ez pont a tétel állítását adja, mert h_1 tetszőleges volt. $\square$

Ez azt jelenti, hogy H_i benne van az összes normalizátorban, azaz ezek metszetében, $Norm(G)$-ben is. Tudjuk, hogy a csoport normája mindig benne van a csoport *második centrumában*, azaz $Z(G/Z(G))$ ősképében. [SCH]
Ez érdekes eredmény, ha azzal hasonlítjuk össze, hogy a normálosztósághoz pedig az első centrumban kellett benne lennie. Ez bizonyos lépcsőzetességet sugall a három fogalommal (moduláris részcsoport, kvázinormálosztó, normálosztó) kapcsolatban. Szeretnénk, ha ennek megfelelően a normalitás leolvasható lenne $L(G^3)$-ből. A másik gondolat, ami ezzel kapcsolatban előjön az,

hogy a centrum fontos szerepet játszhat, így annak leolvasása is érdekes lehet. A 4.20 tétel szerint tudjuk, hogy $LN(G \times G)$-ből már meghatározható a centrum. Kérdés, hogy elég-e ennél kevesebb, mert nem látni ellenpéldát $LN(G)$ és $L(G \times G)$ esetére sem.

Ígéretes kérdés lehet a kvázinormálosztók szelet-tétellel való leírása (mint ahogy a 4.6 tételben leírjuk a normálosztókat). Ez esetben sajnos jóval bonyolultabb a helyzet. Annak ellenére, hogy elég csak a prímhatványrendű ciklikus részcsoportokkal foglalkozni.

4.13. Állítás. *P pontosan akkor kvázinormális a G véges csoportban, ha minden prímhatványrendű ciklikus részcsoporttal felcserélhető.*

Bizonyítás: Ha P kvázinormális, akkor nyilván felcserélhető a prímhatványrendű ciklikus részcsoportokkal is. Másrészt minden véges csoportot generálnak a prímhatványrendű elemei, tehát ha a csoport összes prímhatványrendű ciklikus részcsoportjával felcserélhető P, akkor az egész csoporttal is. $\square$

Feladatunk tehát két részcsoport (az előző állítás alapján esetleg feltehetjük, hogy az egyik prímhatványrendű ciklikus) felcserélhetőségének ellenőrzése a szelet-tétel segítségével. Adunk egy szükséges feltételt, de ez valószínűleg nem elégséges.

4.14. Állítás. *Legyen $H \sim \varphi_1 : H_1/N_1 \to H_2/N_2$, $I \sim \varphi_2 : I_1/M_1 \to I_2/M_2$. Ekkor a HI szorzat első tényezőre eső vetülete H_1I_1, a vetítés magja pedig*

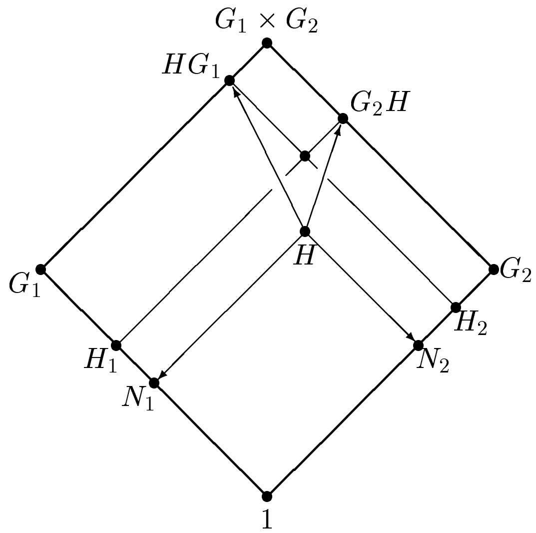
$$S = \{xy^{-}1 \mid x \in H_1, y \in H_2, (xN_1)\varphi_1 \cap (yM_1)\varphi_2 \text{ nem üres}\} \tag{4.4}$$

A második tényezőre való vetítés hasonlóan megy. Nyilván szükséges feltétel tehát, hogy H_iI_i részcsoport legyen, valamint az is, hogy a vetítések magjai normálosztót alkossanak benne. Sajnos nem látszik jó feltétel ennek a normálosztóságára, valamint ez a feltétel valószínűleg nem elég, ugyanis az is kellene, hogy az ezután kapott szeletek között keletkezzen egy természetes izomorfizmus.

4.3. Normálosztók

Ha a kisebb direkt hatványok részcsoporthálóit akarjuk leolvasni, hasznos lehet, ha a normálosztókat keressük. Ha ugyanis fel tudnánk ismerni a normálosztókat a részcsoporthálóban, akkor megtalálnánk a direkt hatvány felbontását felbonthatatlanokra, és ha ezután szét is tudjuk válogatni a most már több példányban lévő komponenseket, és össze tudjuk őket jól rakni, akkor megtalálhatjuk a kisebb hatványok részcsoporthálóit.

A következőkben be fogom bizonyítani, hogy ha a normálosztók ki vannak jelölve, akkor már valóban leolvashatók a kisebb direkt hatványok hálói a nagyobból. Először egy lemmát bizonyítok, ami megmutatja, hogyan kell a direkt négyzetben két diszjunkt normálosztóról megállapítani, hogy izomorfak-e.



4.1. ábra. $H_1/N_1 \to H_2/N_2$ a hálóban.

4.15. Lemma. *Legyen G véges csoport. Tegyük fel, hogy G_1 és G_2 csoportokra igaz, hogy $G \times G \cong G_1 \times G_2$. Ekkor G_1 és G_2 pontosan akkor izomorfak, ha $L(G \times G)$-ben létezik legalább egy darab olyan X elem ($G \times G$ részcsoportja), amelyre igaz, hogy $X \cap G_i = 1$ és $XG_i \cong G \times G$ $(i = 1, 2)$. Továbbá G akkor és csak akkor kommutatív, ha $X \lhd G \times G$.*

Bizonyítás: A kulcs az, hogy $G\times G$ (illetve nagyobb általánosságban $G_1\times G_2$) részcsoportjainak vetületeit, illetve a vetítések magjait egyszerű hálóműveletekkel megkaphatjuk, amint azt az ábra is mutatja.
Szükségesség: Ha $G_1 \cong G_2$, akkor minden $G_1/1 \to G_2/1$ alakú részcsoport ilyen.
Elégségesség: Legyen X ilyen részcsoport. Legyenek π_1, π_2 vetítések G_1-re illetve G_2-re. X és G_2 generálják $G_1 \times G_2$-t, valamint X és G_1 diszjunktak, így

$$\pi_1(X) = G_2X \cap G_1 = G_1 \text{ és } Ker(\pi_1) = X \cap G_1 = 1. \tag{4.5}$$

Hasonlóan járhatunk el G_2 esetén is, azaz $X \sim G_1/1 \to G_2/1$ valamilyen f izomorfizmussal, vagyis pont azt kaptuk, hogy G_1 és G_2 izomorfak.
A 4.6 tétel alapján $G_1/1 \to G_2/1$ pontosan akkor normálosztó, ha $G_1 \leq Z(G_1/1)$ és $G_2 \leq Z(G_2/1)$, ami azt jelenti, hogy G_1, G_2 kommutatívak. □

A lemma után már egyszerűen belátható a következő tétel, amely azt mondja, hogy $LN(G \times G)$-ből leolvasható $LN(G)$.

4.16. Tétel. *Legyen G egy véges csoport. Tegyük fel, hogy $L(G \times G) \cong L(H \times H)$ és a két háló között menő φ izomorfizmus normálosztót normálosztóba visz. Ekkor $L(G) \cong L(H)$ úgy, hogy $\varphi(G\times 1) \cong H$, azaz az izomorfizmust φ leszűkítése adja és így a normálosztók is a helyükön maradnak, vagyis*

$$LN(G \times G) \cong LN(H \times H) \Longrightarrow LN(G) \cong LN(H). \tag{4.6}$$

Bizonyítás: Mivel az izomorfizmus normálosztót normálosztóba visz, $\varphi(G\times 1)$ és $\varphi(1\times G)$ szintén normálosztók. Az izomorfia miatt a metszetük 1, az uniójuk pedig a teljes $H \times H$. Ez azt jelenti, hogy $H \times H \cong \varphi(G \times 1) \times \varphi(1 \times G)$. Tetszőleges $G \to G$ alakú részcsoport képe teljesíti az előző lemma feltételeit (ismét az izomorfia miatt), azaz $\varphi(G \times 1) \cong \varphi(1 \times G)$. A Krull–Remak–Schmidt tétel szerint ebből az következik, hogy $\varphi(G \times 1) \cong H \cong \varphi(1 \times G)$, és ezzel igazoltuk, hogy $L(G) \cong L(H)$.

Ennél több is igaz, hiszen a bizonyítás alapján nyilvánvaló, hogy $L(G)$-ből ezután leolvashatjuk a normálosztókat is, így igazából $LN(G)$-t kapjuk meg. □

Továbbmenve, könnyen látszik, hogy a tétel kimondható teljes általánosságban, magasabb hatványokra is.

4.17. Tétel. *Ha adott $LN(G^n)$, akkor minden $0 < k < n$ esetén $LN(G^k)$ meghatározható.*

Bizonyítás: Az előző bizonyítás gondolatmenetét alkalmazva könnyen belátható, hogy találunk n darab izomorf részcsoportot, amik együttesen generálják az egész csoportot és bármelyikük diszjunkt az összes többi egyesítésétől. Ezek pedig ezután ugyanúgy mind H-val izomorfak, tehát k ilyen részcsoport egyesítésének részcsoporthálója $L(G^k)$-val izomorf. □

A 4.15 lemma egyszerű következménye, hogy $LN(G \times G)$-ből leolvasható a csoport kommutativitása, hiszen elég megnézni, hogy $G \to G$ normálosztó-e. Ez természetesen nem új eredmény, hiszen már láttuk, hogy ehhez $L(G \times G)$ ismerete is elég. Ezután viszont érdemes megnézni, elég-e esetleg $LN(G)$ is ehhez.

4.18. Tétel. *Ha G véges, kommutatív csoport és $LN(G) \cong LN(H)$, akkor H is az.*

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy H nem kommutatív. Mivel G kommutatív, neki minden részcsoportja normálosztó, így - mivel a normálosztók ki vannak jelölve - H Hamilton-féle. A nem-kommutatív Hamilton-csoportokról tudjuk, hogy néhány kommutatív, páratlan rendű p-csoport, esetleg egy elemi Abel 2-csoport és a kvaternió-csoport direkt szorzata. Ebből viszont már következik, hogy H (és így G is) tartalmaz Q-val izomorf részcsoporthálójú részcsoportot. Viszont Abel-csoport részcsoporthálója nem lehet $L(Q)$-val izomorf, ugyanis a véges Abel-csoportok közül csak a prímhatványrendűeknek van egyszerű talpuk. (lásd még Q hálóját a 2.1-es ábrán) □

A 4.15 lemma másik következménye az, hogy $LN(G \times G)$-ből a csoport centruma is leolvasható. Először belátunk egy egyszerű lemmát.

4.19. Lemma. *Ha $G_1 \cong G_2$, akkor tetszőleges $N \lhd G_1$ esetén:*

$$N \leq Z(G_1) \iff (\exists M \lhd G_2)(N \cong M \text{ és } N/1 \to M/1 \lhd G_1 \times G_2) \quad (4.7)$$

Bizonyítás: Mindkét irány könnyű.

Szükségesség: Legyen φ a csoportok közti izomorfizmus, továbbá $N \lhd G_1$. Ha $N \leq Z(G_1)$, akkor $\varphi(N) \leq Z(G_2)$. Legyen $M = \varphi(N)$, ez nyilván normálosztó G_2-ben és a 4.6 tétel alapján $N/1 \to M/1 \lhd G_1 \times G_2$

Elégségesség: Ugyanazon tétel miatt nyilvánvaló, hogy $N \leq Z(G_1)$, sőt még az is igaz, hogy $M \leq Z(G_2)$. $\square$

4.20. Tétel. *$LN(G \times G)$-ben felismerhető a centrum, azaz ha $\varphi : L(G \times G) \to L(H \times H)$ olyan hálóizomorfizmus, amely normálosztót normálosztóba visz, akkor $\varphi(Z(G \times G)) = Z(H \times H)$. Ha $Z(G)$ véges, akkor ebből $Z(G) \cong Z(H)$ is következik.*

Bizonyítás: Először megkeressük a hálóban $L(G)$ két diszjunkt, $L(G \times G)$-t generáló példányát (legyen mindkettő normálosztó is). Ezt a 4.16 tétel alapján megtehetjük. Nevezzük az első példányt G_1-nek, a másodikat G_2-nek, nyilván $G \times G \cong G_1 \times G_2$. Ezután az előző lemma alapján sorban végignézzük G_1 normálosztóit, és megnézzük, benne vannak-e $Z(G_1)$-ben. Ha pozitív eredményt kapunk, tegyük az illető normálosztót a H halmazba. H legkisebb felső korlátja lesz a centrum (mivel a centrum összes részcsoportját beletettük H-ba, és ezek együtt nyilván generálják őt).

Megtaláltuk tehát $Z(G_1)$-et, hasonlóan megkereshetjük $Z(G_2)$-t is. Ezek egyesítéseként megkapjuk $Z(G \times G) = Z(G) \times Z(G)$-t. Ha pedig a kapott centrum véges, akkor ez a háló pedig már meghatározza $Z(G)$-t, hiszen az kommutatív csoport, amely direkt négyzetének hálójából az eredeti csoport már leolvasható. $\square$

5. fejezet

Összefoglalás

Diplomamunkámban a csoportok és részcsoporthálójuk kapcsolatával foglalkoztam. Áttekintettem, majd összefoglaltam a téma legfontosabb eredményeit. A kiindulópont az volt, hogy fontos csoportosztályokra tudjuk, hogy a részcsoportháló, illetve a direkt négyzet részcsoporthálója meghatározza a csoportot.

Három célt tűztem ki magam elé. Az első a csoportelméletben való alapos elmélyedés, a részcsoporthálók struktúrájának megismerése volt. Feladatomul tűztem ki a vizsgálathoz szükséges eszközök megtalálását és esetleges továbbfejlesztését. Fontosnak tartottam, hogy minél otthonosabban mozogjak a témában, így ábrákat készítettem, konkrét hálókat rajzoltam fel és fejlesztettem a GAP tudásomat is. Természetesen nagy hangsúlyt helyeztem a témámhoz kapcsolódó legfontosabb eredmények áttekintésére is. Dolgozatom elején összefoglaltam ezeket.

A második, hosszabb távú cél annak belátása volt, hogy valamely direkt hatványról (esetleg már a direkt köbről) belássam, hogy annak részcsoporthálója már meghatározza a csoportot. Ez nem sikerült, ami nem is véletlen, ugyanis nemrégiben kiderült, hogy egy 1968-as cikkben erre már lényegében ellenpélda született. Részletesen tárgyaltam ezt az ellenpéldát (valamint a már régóta ismert másikat a direkt négyzet esetére). Ez mindazonáltal nem zárt le minden utat, felvethető esetleg az a kérdés, hogy mi a helyzet a nilpotens csoportokkal. Ezek esetén még mindig lehetséges, hogy valamely direkt hatvány hálója már meghatározza a csoportot.

Harmadik célom az volt, hogy bebizonyítsam: a nagyobb hatványok részcsoporthálói több információt tartalmaznak a csoportra nézve. Ez a sejtés elég természetes és nagyon igaznak tűnik. Dolgozatom negyedik fejezete ezzel a kérdéssel foglalkozik. Ehhez egyik út lehet a direkt hatvány részcsoporthálójában a normálosztók felismerése. Ezért részletesen vizsgáltam a direkt négyzet normálosztóit, illetve azokat a részcsoportokat, amelyek a részcsoporhálóban a normálosztókkal összekeverhetők lehetnek: a moduláris, illetve kvázinormális részcsoportokat. $L(G)$-ben még viszonylag reménytelen próbálkozás a normálosztók megtalálása: túl könnyen összekeverhetjük őket a többi elemmel, például még a normalitásnál gyengébb kvázinormalitást (minden részcsoporttal való felcserélhetőséget) sem tudjuk általában felismerni. A direkt négyzetben már jobb a helyzet, itt már a kvázinormálosztók felismerhetőek. Remélhetőleg valamely magasabb hatványban (esetleg a direkt négyzetben is, bár ez valószínűtlen) már felismerhetőek lesznek.

Bevezettem az $LN(G)$ jelölést és beláttam, hogy $LN(G^n)$ már meghatározza $LN(G^k)$-t ($k \leq n$). Amennyiben a normálosztókat le tudnánk olvasni, megoldódna az a kérdés, hogy nagyobb hatvány részcsoporthálója meghatározza-e a kisebbét. Először ennek a vizsgálatát szeretném folytatni, míg a többi nyitott kérdés lehetőséget ad a témában való további kutatásokra.

Irodalomjegyzék

[SU] Michio Suzuki, Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups, Springer-Verlag, 1956

[LU] Lukács Erzsébet, Related Structures of Groups, Ph. D. Disszertáció, 1989

[PPP] Pálfy Péter Pál, Groups and Lattices, Mathmatical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Preprint No. 3/2001.

[RS] Roland Schmidt, Der Untergruppenverband des direkten Produktes Zweier isomorpher Gruppen, J. Algebra 73 (1981), 264-272.

[LP] Lukács Erzsébet, Pálfy Péter Pál, Modularity of the subgroup lattice of a direct square, Archiv der Mathematik, 46 (1986), 18-19

[SCH] Eugene Schenkman, On the norm of a group, Illinois J. of Math., 4 (1960), 150-152.

[APS] Anne Penfold Street, Subgroup-determining functions on groups, Illinois J. of Math., 12 (í968), 99-120