Direkt hatványok részcsoporthálói

Kivonat

Témám motivációját Lukács Erzsébet 1989-es doktori disszertációja adja, ahol a szerző több állítás mellett belátta, hogy moduláris csoportok esetén a direkt négyzet részcsoporthálója már meghatározza a csoportot.

Dolgozatom első részében a részcsoporthálókkal kapcsolatos legfontosabb fogalmakat, eredményeket ismertetem. Elsősorban azokat az eredményeket gyűjtöttem össze, amelyek a csoport vagy annak direkt hatványának részcsoporthálója általi meghatározottsággal foglalkoznak.

Célom voltvalamely direkt hatványról (esetleg már a köbről) megmutatni: részcsoporthálója már meghatározza a csoportot. Ez nem sikerült, és nemrégiben kiderült, hogy egy 1968-as cikkben cikkben szerepel egy konstrukció, ami erre a kérdésre is ellenpéldát ad. Ezt, és a direkt négyzetre vonatkozó ellenpéldát is részletesen tárgyaltam. Ez mindazonáltal nem zárt le minden utat, érdekesek lehetnek olyan eredmények is, amelyek további természetes csoportosztályokra (nilpotens csoportokra például nincs még ellenpélda) mutatják meg, hogy esetleg már a direkt négyzet részcsoporthálója meghatározza a csoportot. Bár ezzel az iránnyal most nem foglalkoztam, a távolabbi céljaim között szerepel ennek a kérdéskörnek a vizsgálata.

Természetes gondolat az, hogy ha nagyobb hatványt nézünk, annak részcsoporthálója több információt tartalmaz a csoportra nézve. Két részre bontottam ezt a feladatot: a normálosztók (kvázinormálosztók, moduláris elemek) felismerésére, illetve arra, hogy milyen eredményre jutunk, ha ezeket ismerjük. Beláttam azt, hogy ha a normálosztókat ismertnek feltételezzük, akkor a magasabb direkt hatványok hálója már meghatározza az alacsonyabbakét. Ha valamely magasabb hatványban meg tudnánk találni a normálosztókat, akkor a fenti kérdés lényegében megoldódna. Dolgozatomban szerepel néhány olyan eredmény, ami a direkt hatványokban a normálosztók felismerésének irányába mutat.