Matematika A2 vizsga megoldás
2014. május 19.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $f(x)$ függvény x_0-ban vett Taylor-sorát!

   Megoldás: Az $f(x)$ függvény x_0-ban vett Taylor-sora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

   (b) *(4 pont)* Határozza meg az $f(x) = \ln(1+2x)$ függvény $x_0 = 0$-ban vett Taylor-sorát!

   Megoldás: A megoldáshoz felhasználjuk, hogy ismert az $\ln(1+x)$ függvény $x_0 = 0$-ban vett Taylor-sora, ami a következő:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

   A fenti sorfejtés akkor állítja elő a függvényt, ha $-1 < x < 1$.
   Ezek alapján kapjuk, hogy

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2x)^n}{n},$$

   és a fenti sorfejtés akkor állítja elő $f(x)$-et, ha $-1 < 2x < 1$, azaz $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

2. (a) *(3 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok a V vektortér bázisát alkotják!

   Megoldás: V vektortérben a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok bázist alkotnak, ha minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen írható $\alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n$ alakba, ahol $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

   (b) *(3 pont)* Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^3$-ben a $\underline{v}_1 = (1,2,3)$, $\underline{v}_2 = (1,-1,0)$ és $\underline{v}_3 = (2,1,3)$ vektorok bázist alkotnak?

   *Megoldás:*A három vektor bázist alkot, ha lineárisan függetlenek. Hiszen $\mathbb{R}^3$-ban minden bázis 3 dimenziós, így 3 lineárisan független vektor biztosan bázist alkot. A lineáris függetlenség ellenőrzéséhez kiszámoljuk a sorvektorokból álló mátrix rangját, hiszen ez egyben megadja az általuk generált sortér dimenzióját, azaz a lineárisan független vektorok számát.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   A fenti Gauss-elimináció lépései: először az első sort kivontuk a második sorból és az első sor kétszeresét kivontuk a harmadik sorból; majd a második sort elosztottuk (-3)-mal, legvégül pedig a

harmadik sorhoz hozzáadtuk a második sor háromszorosát.
Tehát a fenti mátrixból leolvasható, hogy a sortér 2 dimenziós, azaz a fenti vektorok között csupán kettő lineárisan független, így NEM alkotnak bázist. (Az, hogy nem lineárisan függetlenek onnan is látszott, hogy az első két vektor összege kiadja a harmadik vektort.)

3. (a) *(3 pont)* Definiálja az $f(x,y)$ függvény kettős integrálját a $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartományon.

   Megoldás: Tekintsük a D tartomány téglalapokra történő felosztását. Egy téglalap belső pontja legyen az (ξ_{ij}, η_{ij}), ahol $x_{i-1} \leq \xi_{ij} \leq x_i$ és $y_{j-1} \leq \eta_{ij} \leq y_j$. Ekkor

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}A = \lim_{\substack{n,m\to\infty \\ \max\{\Delta x_i, \Delta y_j\}\to 0}} \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\Delta A_{ij}.$$

   (b) *(2 pont)* Adjon elégséges feltételt arra, hogy mikor létezik az $f(x,y)$ függvénynek a D korlátos tartományon kettős integrálja.

   Megoldás: Ha $f(x,y)$ folytonos a D korlátos tartományon, akkor létezik a $\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}A$ kettős integrál.

   (c) *(2 pont)* Mi a geometriai jelentése az $f(x,y)$ függvény $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartományon vett kettős integráljának?

   Megoldás: Az $f(x,y)$ függvény kettős integrálja a D tartományon előjeles térfogatot jelent. Azaz amennyiben $f(x,y)$ grafikonja az xy-sík felett helyezkedik el, akkor a kettős integrál értéke nem más, mint azon D fölötti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet alulról az xy-sík felülről pedig a $z = f(x,y)$ határol. Ha $f(x,y)$ grafikonja az xy-sík alatt helyezkedik el, akkor a $\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}A$ nem más, mint azon D alatti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet felülről az xy-sík alulról pedig a $z = f(x,y)$ határol. Ha $\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}A = 0$, akkor ez azt jelenti, hogy ugyanannyi térfogatrészünk van az xy-sík felett, mint alatta.

4. *(6 pont)* Határozza meg a 2π szerint periodikus $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$ függvény Fourier-sorának első négy nemnulla tagját!

Megoldás: Felrajzolva a függvényt azt láthatjuk, hogy $f(x)$ nem páros és nem páratlan (ugyanakkor a $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ függvény már páratlan). Így definíció szerint kell kiszámolnunk Fourier-sorának együtthatóit. Mivel a függvény csak a $(-\pi, 0)$ intervallumon nem 0, emiatt csak ezen az intervallumon kell majd integrálnunk.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}[x]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\frac{-1+(-1)^k}{k},$$

Tehát a páros indexű b_k együtthatók 0-k, így az első négy nemnulla taghoz b_1-et, b_3-at, b_5-öt és b_7-et kell kiszámolnunk. Ezek alapján $b_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_3 = -\frac{2}{3\pi}$, $b_5 = -\frac{2}{5\pi}$ és $b_7 = -\frac{2}{7\pi}$. Tehát a $f(x)$ Fourier-sorának első négy nem nulla tagja a következő ($\phi(x)$ jelöli a Fourier-sort):

$$\phi(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sin(x) - \frac{2}{3\pi}\sin(3x) - \frac{2}{5\pi}\sin(5x) - \frac{2}{7\pi}\sin(7x).$$

5. *(7 pont)* Határozza meg, hogy mely a, b értékek esetén lesz egyértelmű, végtelen sok megoldása vagy nem lesz megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, akkor az összes megoldást fel kell írni!

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 9 \\ x + ay + z &= 9 \\ x + y + az &= b \end{aligned}$$

Megoldás: A megoldás során Gauss-eliminációt végzünk az egyenletrendszer kibővített mátrixára. Először tekintsük át az $a = 1$ esetet. Ekkor a kibővített mátrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-9 \end{array}\right)$$

A fenti Gauss elimináció lépései: kivonjuk a második és a harmadik sorból is az első sort. Ezalapján a fenti egyenletrendszernek nincs megoldása, ha $a = 1$ és $b \neq 9$, illetve végtelen sok megoldása van, ha $a = 1$ és $b = 9$. Ekkor a végtelen sok megoldás: $z = t$, $y = s$ és $x = 9 - t - s$, ahol $t, s \in \mathbb{R}$.
Mostantól pedig tegyük fel $a \neq 1$. Ekkor a könnyebb számolhatóság érdekében a Gauss elimináció előtt megcseréljük az egyenletek sorrendjét. Így a kibővített mátrixunk most a következő alakot ölti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 9 \\ a & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 9 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 9-9a \\ 0 & 1-a & a-1 & b-9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 9 \\ 0 & 1+a & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{b-9}{1-a} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{b-9}{1-a} \\ 0 & 1+a & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{b-9}{1-a} \\ 0 & 0 & a+2 & 9-(1+a)\frac{b-9}{1-a} \end{array}\right)$$

A fenti Gauss-elimináció lépései: a második sorból kivonjuk az első sor a-szorosát és a harmadik sorból kivonjuk az első sort; majd elosztjuk a második és harmadik sort $(1-a)$-val, ezt követően megcseréljük a második és a harmadik sort, majd pedig a harmadik sorból kivonjuk a második sor $(1+a)$-szorosát. Ezután a következő következtetéseket tudjuk levonni. Ha $a \neq -2$, akkor egyértelmű megoldása van az egyenlrendszernek. Ekkor

$$z = \frac{9}{a+2} - \frac{(1+a)(b-9)}{1-a)(a+2)} \qquad y = \frac{b-9}{1-a} + \frac{9}{a+2} - \frac{(1+a)(b-9)}{1-a)(a+2)}$$

$$x = 9 - a\left(\frac{b-9}{1-a} + \frac{9}{a+2} - \frac{(1+a)(b-9)}{(1-a)(a+2)}\right) - \left(\frac{9}{a+2} - \frac{(1+a)(b-9)}{(1-a)(a+2)}\right)$$

Ha $a = -2$ és $b \neq 18$, akkor nincs megoldása az egyenlerendszernek, míg ha $a = -2$ és $b = 18$, akkor ismét végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek. Ekkor a fenti mátrix a következő alakot ölti az utolsó lépésnek megfelelően:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tehát ekkor $z = t$, $y = 3 + t$ és $x = t + 15$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

6. *(4+3 pont)* Határozza meg az $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait! Határozza meg a $\underline{\underline{C}}^{2014}$ mátrixot!

Megoldás: Először a mátrix sajátértékeit számoljuk, amik a $\det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right)$ karakterisztikus polinom gyökei. A karakterisztikus polinom (a determinánst harmadik sor szerint kifejtve számoljuk):

$$\det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 4\right].$$

A karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ és $\lambda_3 = 1$.
Ezek után következik a sajátvektorok kiszámítása, amik az $\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right)\underline{v} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Azaz $\lambda_1 = 0$ esetén

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A fenti Gauss-elimináció lépése: az első sort kivontuk a második sorból.
Ezek alapján kapjuk, hogy a $\underline{v}$ sajátvektor harmadik v_3 koordinátája 0, míg a második v_2 koordinátája tetszőlegesen megválasztható, és az első koordináta v_1 a második (-1)-szerese. Azaz $\underline{v} = (-t; t; 0)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
$\lambda_2 = 4$ esetén

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A fenti Gauss-elimináció lépései: az első sort hozáadtuk a második sorhoz és a harmadik sort elosztottuk (-3)-mal.
Ezek alapján kapjuk, hogy a $\underline{v}$ sajátvektor harmadik v_3 koordinátája 0, míg a második v_2 koordinátája tetszőlegesen megválasztható, és az első koordináta v_1 megegyezik a második koordinátával. Azaz $\underline{v} = (t; t; 0)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
$\lambda_3 = 0$ esetén

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A fenti Gauss-elimináció lépése: az első sor kétszeresét kivontuk a második sorból.
Ezek alapján kapjuk, hogy a $\underline{v}$ sajátvektor harmadik v_3 koordinátája tetszőlegesen megválasztható, míg az első két koordináta v_1 és v_2 egyaránt 0 Azaz $\underline{v} = (0; 0; t)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

A $\underline{\underline{C}}$ mátrixnak létezik 3 különböző sajátértéke és a hozzájuk tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, így a mátrix diagonalizálható. Ráadásul $\underline{\underline{C}}$ szimmetrikus mátrix, így létezik egy ortogonális $\underline{\underline{P}}$ mátrix, ami őt diagonalizálja.

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tudjuk, hogy a mátrixhatvány kiszámítása $\underline{\underline{P}}$ és $\underline{\underline{D}}$ ismeretében megkönnyíthető, hisz fennáll a $\underline{\underline{C}}^{2014} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{D}}^{2014} \underline{\underline{P}}^T$ formula. Tehát

$$\underline{\underline{C}}^{2014} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{2014} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\underline{\underline{C}}^{2014} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{2013} & 2 \cdot 4^{2013} & 0 \\ 2 \cdot 4^{2013} & 2 \cdot 4^{2013} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x, y) = xy$ függvény maximumát az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszisen Lagrange-multiplikátort használva!

Megoldás: A feltételfüggvény tehát a következő: $g(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$. Képezzük a $h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ függvényt, és ennek keressük meg azon pontjait, ahol a paricális deriváltak eltűnnek. $h'_x(x, y, \lambda) = y - \lambda \frac{x}{2}$, $h'_y(x, y, \lambda) = x - \lambda \frac{2}{9} y$, míg $h'_\lambda(x, y, \lambda) = -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1$. Azaz meg kell oldanunk a

$$y - \lambda \frac{x}{2} = 0 \qquad x - \lambda \frac{2}{9} y = 0 \qquad -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$$

egyenletrendszert. Kifejezve az első két egyenletből λ-t kapjuk, hogy $\lambda = \frac{2y}{x}$ illetve $\lambda = \frac{9x}{2y}$. Ezen két egyenletet egyenlővé téve kapjuk, hogy $y^2 = \frac{9}{4} x^2$. Ezt visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe: $-\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} + 1 = 0$, azaz $x^2 = 2$. Ennek megoldásai: $x_1 = \sqrt{2}$ és $x_2 = -\sqrt{2}$. Azaz meghatározva az y értékeket is kapjuk, hogy a lehetséges szélsőérték-helyek: $(\sqrt{2};\ 1{,}5\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\ -1{,}5\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 1{,}5\sqrt{2})$ és $(-\sqrt{2};\ -1{,}5\sqrt{2})$.
Ezekben a pontokban kell tehát megvizsgálnunk a függvény helyettesítési értékeit:

$$f(\sqrt{2};\ 1{,}5\sqrt{2}) = 3 \qquad f(\sqrt{2};\ -1{,}5\sqrt{2}) = -3$$

$$f(-\sqrt{2};\ 1{,}5\sqrt{2}) = -3 \qquad f(-\sqrt{2};\ -1{,}5\sqrt{2}) = 3$$

Tehát a keresett feltételes maximumhelyek: $(\sqrt{2}; 1{,}5\sqrt{2})$ és $(-\sqrt{2}; -1{,}5\sqrt{2})$, míg a maximum értéke 3.

8. *(6 pont)* Határozza meg az $f(x, y) = xy$ függvény által generált felület felszínét a $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x > 0\}$ tartomány felett!

Megoldás: Tudjuk, hogy egy felület felszíne egy D tartomány felett a következő képlettel számolható:

$$A = \int \int_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\ \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

A D tartomány ezesetben pedig nem más, mint egy félkör, így polárkoordinátás helyettesítést hajtunk végre. Azaz $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, míg a Jacobimátrix determinánsa: $|J| = r$. A feladat szövege alapján felírhatóak a határok: $0 \leq r \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Tehát a felület felszíne:

$$\int\int_D \sqrt{1+y^2+x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\cdot 2r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \left[(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{2^{3/2}-1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}\varphi = \frac{(2^{3/2}-1)\pi}{3}$$

9. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y,z) = z$ függvény hármasintegrálját az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és $x + 2y + 3z = 6$ síkok által határolt tartományon!

Megoldás: A feladatból leolvashatóak a megadott tartomány határai. Ez a T tartomány x-, y-, és z-szerint is normáltartomány. Ilyenkor mindegy milyen sorrendben választjuk meg az integrálás határait. Mi most z-szerinti normáltartományként tekintjük a tartományt. Így a határok: $0 \leq x \leq 6 - 2y - 3z$, $0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}z$ és $0 \leq z \leq 2$. Tehát a hármasintegrál:

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} \int_0^{6-2y-3z} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} z\,[x]_0^{6-2y-3z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} 6z - 2yz - 3z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \left[6zy - y^2z - 3z^2y\right]_0^{3-\frac{3}{2}z} \mathrm{d}z = \int_0^2 9z - 9z^2 + \frac{9}{4}z^3\mathrm{d}z =$$

$$= \left[\frac{9z^2}{2} - 3z^3 + \frac{9z^4}{16}\right]_0^2 = 18 - 24 + 9 = 3$$