Matematika A2 vizsga megoldása
2013. május 28.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja a $\sum a_n$ végtelen sor konvergenciáját!

   Megoldás: A $\sum a_n$ végtelen sor n-edik részletösszege $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ha a részletösszegek sorozata az L számhoz konvergál, azaz $\lim_{n\to\infty} s_n = L$, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor konverges és összege L. Különben a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

   (b) *(3 pont)* Számítsa ki a konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{6^n}$ végtelen sor összegét!

   Megoldás: A megoldás során használjuk a geometria sor összegképletét, azaz tudjuk, hogy

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} aq^n = \frac{aq^{n_0}}{1-q}, \text{ha} \quad |q| < 1.$$

   Mielőtt ezt a formulát használnánk, előbb át kell alakítanunk a fenti kifejezést

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\cdot 2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 2^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot \left(\frac{2}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n$$

   Itt az utolsó előtti lépésben felhasználtuk, hogy mindkét geometria sor konverges, így az eredeti összeg szétbontható két konvergens sor összegére. Azaz most már használhatjuk majd a fent említett összegképletet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2\cdot \frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2.$$

2. (a) *(3 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok a V vektortér bázisát alkotják!

   Megoldás: V vektortérben a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok bázist alkotnak, ha minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen írható $\alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n$ alakba, ahol $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

   (b) *(3 pont)* Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^3$-ben a $\underline{v}_1 = (2,3,1)$, $\underline{v}_2 = (1,-1,0)$ és $\underline{v}_3 = (3,2,1)$ vektorok bázist alkotnak?

   Megoldás: A három vektor bázist alkot, ha lineárisan függetlenek. Hiszen $\mathbb{R}^3$-ban minden bázis 3 dimenziós, így 3 lineárisan független vektor biztosan bázist alkot. A lineáris függetlenség ellenőrzéséhez kiszámoljuk a sorvektorokból álló mátrix rangját, hiszen ez egyben megadja az általuk generált sortér dimenzióját, azaz a lineárisan független vektorok számát.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A fenti Gauss-elimináció lépései: először megcseréltük az első a második sort; majd az első sor kétszeresét kivontuk a második sorból és az első sor háromszorosát kivontuk a harmadik sorból; legvégül pedig a harmadik sorból kivontuk a második sort.
Tehát a fenti mátrixból leolvasható, hogy a sortér 2 dimenziós, azaz a fenti vektorok között csupán kettő lineárisan független, így NEM alkotnak bázist. (Az hogy nem lineárisan függetlenek onnan is látszott, hogy az első két vektor összege kiadja a harmadik vektort.)

3. (a) *(3 pont)* Definiálja az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n*n}$ mátrix determinánsát!

Megoldás: Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix determinánsa

$$\det\underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

ahol az összegzés $1, 2, \dots, n$ összes permutációjára vonatkozik és $I(\sigma)$ jelöli az adott permutációban az inverziók számát.

(b) *(5 pont)* A Cramer-szabállyal oldja meg az alábbi egyenletrendszert (csak a Cramer-szabály használatáért jár pont)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 4z &= 17 \\ x + 3y + 9z &= 34 \end{aligned}$$

Megoldás: A Cramer-szabály alkalmazásához négy determinánst kell kiszámolnunk:

$$\det\underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (18 + 4 + 3) - (2 + 12 + 9) = 2$$

$$\det\underline{\underline{A}}_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 17 & 2 & 4 \\ 34 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (108 + 135 + 51) - (68 + 72 + 153) = 2$$

$$\det\underline{\underline{A}}_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 17 & 4 \\ 1 & 34 & 9 \end{vmatrix} = (153 + 24 + 34) - (17 + 54 + 136) = 4$$

$$\det\underline{\underline{A}}_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 17 \\ 1 & 3 & 34 \end{vmatrix} = (68 + 17 + 18) - (12 + 51 + 34) = 6$$

Ezek alapján kapjuk végül az egyenletrendszer megoldását:

$$x = \frac{\det\underline{\underline{A}}_x}{\det\underline{\underline{A}}} = \frac{2}{2} = 1, \quad y = \frac{\det\underline{\underline{A}}_y}{\det\underline{\underline{A}}} = \frac{4}{2} = 2, \quad z = \frac{\det\underline{\underline{A}}_z}{\det\underline{\underline{A}}} = \frac{6}{2} = 3.$$

4. *(6 pont)* Határozza meg az $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x+3)^n$ hatványsor konvergenciatartományát!

Megoldás: A fenti hatványsor középpontja $x_0 = -3$ és együtthatója $c_n = \dfrac{1}{n+1}$. A konvergenciatartomány meghatározásának első lépése a konvergenciasugár meghatározása. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1.$$

Azaz $R = 1$ lesz a konvergenciasugár. Tehát a $(-3-1; -3+1) = (-4; -2)$ nyílt intervallum biztosan része a konvergenciatartománynak. De még meg kell vizsgálnuk mi a helyzet az intervallum két végpontja esetén. Ha $x = -4$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(-4+3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

végtelen sort kapjuk. Ez előjelváltó, és így a Leibniz-kritétium alapján konvergens (hisz $\dfrac{1}{n+1}$ monoton csökkenve nullához tart). Míg ha $x = -2$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(-2+3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

végtelen sort kapjuk, amiről tudjuk, hogy divergens.
Tehát a konvergenciatartomány a $[-4; -2)$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

5. *(6 pont)* Határozza meg $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < x \le \pi \end{cases}$ 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorának első négy nemnulla tagját!

Megoldás: Felrajzolva a függvényt azt láthatjuk, hogy $f(x)$ se nem páros, se nem páratlan (ugyanakkor a $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}$ függvény már páratlan). Így definíció szerint kell kiszámolnunk Fourier-sorának együtthatóit. Mivel a függvény csak a $(0, \pi]$ intervallumon nem 0, emiatt csak ezen az intervallumon kell majd integrálnunk.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}[x]_0^{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}.$$

Tehát a páros indexű b_k együtthatók 0-k, így az első négy nemnulla taghoz b_1-et, b_3-at, b_5-öt és b_7-et kell kiszámolnunk. Ezek alapján $b_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $b_3 = \dfrac{2}{3\pi}$, $b_5 = \dfrac{2}{5\pi}$ és $b_7 = \dfrac{2}{7\pi}$. Tehát a $f(x)$ Fourier-sorának első négy nem nulla tagja a következő ($\phi(x)$ jelöli a Fourier-sort):

$$\phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3x) + \frac{2}{5\pi}\sin(5x) + \frac{2}{7\pi}\sin(7x).$$

6. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Határozza meg az $\underline{\underline{A}}$ mátrix

(a) *(4 pont)* inverzét

Megoldás: Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem 0. Így először ezt kel kiszámolnunk. $\det\underline{\underline{A}} = (1+0+0)-(0+0+0) = 1$, azaz a mátrixnak létezik inverze. Ennek meghatározásához Gauss-Jordan eliminációt használunk.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

A fenti Gauss-Jordan elimináció lépései: először kivontuk az első sort a második sorból és a harmadik sorból egyaránt, majd a következő lépésben a második sort vontuk ki vontuk a harmadik sorból. Így megkaptuk, hogy

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *(4 pont)* sajátértékeit, sajátvektorait.

Megoldás: Először a mátrix sajátértékeit számoljuk, amik a $\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right)$ karakterisztikus polinom gyökei. A karakterisztikus polinom (a determinánst első sor szerint kifejtve számoljuk):

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

A karakterisztikus polinomnak ezesetben egy gyöke van: $\lambda = 1$.
Ezek után következik a sajátvektor kiszámítása, ami az $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right)\underline{v} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása. Azaz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A fenti Gauss-elimináció lépései: előbb megcseréltük a sorokat, majd az első sort kivontuk amásodik sorból. Ezek alapján kapjuk, hogy a $\underline{v}$ sjaátvektor harmadik v_3 koordinátája tetszülegesen megválasztható, míg az első két koordináta v_1 és v_2 egyaránt 0. Azaz $\underline{v} = (0;0;1)\cdot t$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

7. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ függvény lokális szélsőértékeit és azok jellegét!

Megoldás: Először is ellenőriznünk kell a szükséges feltétel teljesülését, azaz melyek lesznek azok a pontok, ahol az x-, illetve y-szerinti parciális deriváltak 0-k. $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y$, míg $f'_y(x.y) = 3y^2 - 3x$. Azaz meg kell oldanunk a

$$3x^2 - 3y = 0 \qquad 3y^2 - 3x = 0$$

egyenletrendszert. Kifejezve az első egyenletből y-t kapjuk, hogy $y = x^2$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe: $3x^4 - 3x = 0$ (azaz $3x(x^3-1) = 0$). Ennek megoldásai: $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Azaz

meghatározva az y értékeket is kapjuk, hogy a lehetséges szélsőérték-helyek: $(0,0)$ és $(1,1)$.
A következő lépés az elégséges feltétel teljesülésének ellenőrzése, azaz meghatározzuk a Hesse-determináns. Ehhez $f''_{xx} = 6x$, $f''_{yy} = 6y$ és $f''_{xy} = -3$. Azaz a Hesse-determináns:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

Most már csak be kell helyettesítenünk a pontokat.

$$H(0,0) = 0 \cdot 0 - (-3^2) = -9.$$

Mivel $-9 < 0$, ezért a $(0,0)$ nyeregpont.

$$H(1,1) = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27.$$

Mivel $27 > 0$ és $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$, emiatt az $(1,1)$ pont lokális minimum lesz.

8. *(6 pont)* Határozza meg az $f(x,y) = x$ függvény kettős integrálját a $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ tartományon!

Megoldás: A tartományt felrajzolva láthatjuk, hogy ez egy x-szerinti normáltartomány. Így a kettősintegrál a következőképpen írható fel:

$$\int\int_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,[y]_{x^2}^{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{12}$$

9. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y,z) = \sqrt{1+(x^2+y^2)^2}$ függvény hármasintegrálját az $x^2+y^2 = 100$ henger, $z = x^2+y^2$ forgásparaboloid és az x, y koordinátasikok közötti tartományon!

Megoldás: A megadott hármasintegrál kiszámolásához hengerkoordinátás helyettesítést fogunk végrehajtani. Azaz x és y esetében polárkoordinátákra térünk át, z pedig marad. Azaz $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, míg a Jacobi-mátrix determinánsa: $|J| = r$.
A feladat szövege alapján felírhatóak a határok: $0 \leq r \leq 10$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ és $0 \leq z \leq x^2+y^2$, azaz $0 \leq z \leq r^2$. Tehát a hármasintegrál

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{10}\int_0^{r^2} \sqrt{1+r^4}\cdot r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{10} \sqrt{1+r^4}\cdot r\cdot [z]_0^{r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{10} \sqrt{1+r^4}\cdot r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{10} \sqrt{1+r^4}\cdot 4r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2\cdot(1+r^4)^{3/2}}{3}\right]_0^{10}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{6}\left(10001^{3/2} - 1\right)\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}\left(10001^{3/2} - 1\right)$$