1. Fourier-sorok

1. Bevezetés és definíciók

Ennek a fejezetnek a célja, hogy egy 2π szerint periodikus függvényt felírjunk trigonometrikus függvényekből képzett függvénysorként. Nyilván a $\cos x$ és a $\sin x$ függvények 2π szerint periodikus függvények és általában tetszőleges k egész szám esetén a $\cos kx$ és a $\sin kx$ függvények szintén 2π szerint periodikus függvények, továbbá az ezekből formált

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + \sin kx)$$

függvénysorok is tetszőleges a_0, a_k, b_k valós számok esetén 2π szerint periodikus függvényt adnak (feltéve, hogy mindenhol konvergensek). Ennek a fejezetnek a célja a 2π szerint periodikus függvényt felírni

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + \sin kx)$$

alakú függvénysorként. A feladat tehát az a_0, a_k és b_k valós számok alkalmas megválasztása.

A továbbiakban feltesszük, hogy a 2π szerint peiodikus $f(x)$ Riemann-integrálható a $[0, 2\pi]$ intervallumban. Először az $f(x)$-et a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

végtelen trigonometrikus polinomként írjuk fel. Ekkor formálisan számolva

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)dx =$$

$$\left[a_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k} - b_k \frac{\cos kx}{k}\right]_0^{2\pi} = 2\pi a_0,$$

ezért

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Az a_k, b_k együttható meghatározásához szükségünk lesz a következő integrálokra:

1. Ha $k \neq l$ pozitív egészek, akkor

   (a)

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(k{+}l)x{+}\cos(k{-}l)dx =$$

$$\left[\frac{\sin(k+l)x}{k+l} + \frac{\sin(k-l)x}{k-l}\right]_0^{2\pi} = 0$$

   (b)

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(k{-}l)x{-}\cos(k{+}l)dx =$$

$$\left[\frac{\sin(k-l)x}{k-l} - \frac{\sin(k+l)x}{k+l}\right]_0^{2\pi} = 0$$

   (c)

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(k{+}l)x{+}\sin(k{-}l)dx =$$

$$\left[-\frac{\cos(k+l)x}{k+l} - \frac{\cos(k-l)x}{k-l}\right]_0^{2\pi} = 0$$

2. Másrészt

   (a)

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^{2\pi} = \pi;$$

   (b)

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2} dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

   (c)

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2kx dx =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2kx}{2k}\right]_0^{2\pi} = 0$$

A fentieket használva már meg tudjuk határozni az a_k és b_k együtthatókat:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(a_0 + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l \cos lx + b_l \sin lx)\right)\cos kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi} a_0 \cos kx + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l \cos lx \cos kx + b_l \sin lx \cos kx)dx =$$

$$a_0 \int_0^{2\pi} \cos kx dx +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l \int_0^{2\pi} \cos lx \cos kx dx +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l \int_0^{2\pi} \sin lx \cos kx dx =$$

$$\pi a_k$$

ezért

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

Hasonlóan kapjuk a b_k együtthatókat:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{l=1}^{n} (a_l \cos lx + b_l \sin lx) \right) \sin kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi} a_0 \sin kx + \sum_{l=1}^{n} (a_l \cos lx \sin kx + b_l \sin lx \sin kx) dx =$$

$$a_0 \int_0^{2\pi} \sin kx dx +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l \int_0^{2\pi} \cos lx \sin kx dx +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l \int_0^{2\pi} \sin lx \sin kx dx =$$

$$\pi b_k$$

ezért

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Emiatt természetes a következő 2π szerint periodikus függvénnyel közelíteni a 2π szerint periodikus $f(x)$-et:

1. definíció. A 2π szerint periodikus $f(x)$ Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Példa: Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 2, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

függvényt!
Megoldás: Nyilván

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 dx \right) = \frac{3}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cos kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 \cos kx dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} + \left[2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = 0$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \sin kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 \sin kx dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} + \left[-2 \frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) =$$

$$\frac{\cos k\pi - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi}.$$

Így a nemnulla együtthatók:

$$a_0 = \frac{3}{2}, b_{2k-1} = \frac{-2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

azaz a Fourier sor:

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \right).$$

2. Fourier-sor részletösszegei

A következő tétel azt mondja ki, hogy a Fourier-sor részletösszege a legkisebb átlagos hibanégyzet tulajdonságú.

1. tétel. Legyen az $f(x)$ 2π szerint periodikus függvény, az n-edik részletösszege: $s_n(x)$, azaz

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Legyen

$$t_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

tetszőleges $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ valós együtthatókkal. Ekkor minden $n \geq 1$ esetén

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2\, dx \leq \int_0^{2\pi} (f(x) - t_n(x))^2\, dx$$

és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$.

Bizonyítás: Nyilván

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - t_n(x))^2 dx =$$

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx + \int_0^{2\pi} t_n^2(x)dx - 2\int_0^{2\pi} f(x)t_n(x)dx.$$

De

$$\int_0^{2\pi} f(x)t_n(x)dx =$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right)dx =$$

$$\alpha_0 \int_0^{2\pi} f(x)dx +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx + \beta_k \int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx\right) =$$

$$2\pi\alpha_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k).$$

A $t_n(x)$ definíciójából könnyű ellenőrizni, hogy:

$$\int_0^{2\pi} t_n^2(x)dx = 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Ezért

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - t_n(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2(x)dx + 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) -$$

$$2\left(2\pi\alpha_0 a_0 + \pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right) =$$

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx + 2\pi(\alpha_0 - a_0)^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}\left((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right) -$$

$$\left(2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right),$$

aminek a minimuma $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ esetén lesz, ahonnan már következik a tétel. ■

A minimum esetén:

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx =$$

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx - \left(2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right),$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \geq 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Mivel ez minden $n \geq 1$ esetén igaz, ezért

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \geq 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

A következő, itt nem bizonyított állítás azt mondja ki, hogy itt egyenlőség áll:

2. tétel (Parseval-formula)**.** Ha a 2π szerint periodikus $f(x)$ Riemann-integrálható a $[0, 2\pi]$ intervallumban, akkor

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Ebből már következik, hogy négyzetes átlagban a részletösszeg közel van az $f(x)$ függvényhez:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = 0.$$

Példa: A Parseval formulát használjuk az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 2, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

függvény esetén!

Megoldás: Tudjuk, hogy a nem-nulla Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad b_{2k-1} = \frac{-2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ezért

$$5\pi = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) =$$

$$4,5\pi - \frac{4\pi}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right),$$

ahonnan rendezés után

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

3. Fourier-sor pontonkénti konvergenciája

A következőkben arra keressünk választ, hogy a fent kapott Fourier-sor milyen feltételek esetén állítja elő a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvényt. Ehhez szükség van a következő definicióra:

2. definíció. Az $f(x)$ függvény szakaszosan folytonos az I intervallumon, ha véges sok pont kivételével az $f(x)$ folytonos és ahol szakadása van, ott létezik a bal és jobboldali határérték.

A fenti definícióra támaszkodva már megadhatjuk, hogy a Fourier-sor milyen kapcsolatban van az $f(x)$-szel.

3. tétel. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és $f'(x)$ függvények szakaszosan folytonosak a $[0, 2\pi]$-ben. Ekkor a Fourier-sor értéke az $f(x)$ folytonossági pontjaiban megegyezik $f(x)$-szel, míg szakadási pontokban a bal és jobboldali határértékének átlagát veszi fel.

A fenti, nem bizonyított tétel következménye:

Következmény: Ha a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény olyan, hogy a $[0, 2\pi]$ intervallum felbontható véges sok intervallumra úgy, hogy egy részintervallumon a függvény monoton és folytonos, a szakadási pontokban létezik a bal ill. jobboldali határérték, akkor a Fourier-sor előállítja a függvényt az $f(x)$ folytonossági pontjaiban és a szakadási helyeken a Fourier-sor az $f(x)$ ottani bal és jobboldali határérték átlagát veszi fel.

Példák:

1. (a) Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) = x, \quad \text{ha } 0 < x < 2\pi$$

2π szerint periodikus függvényt!

(b) Határozza meg $f(2k\pi)$ értéleit úgy, hogy $f(x)$ mindenhol folytonos legyen!

Megoldás: A határozott integrál definíciója alapján:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \pi,$$

továbbá

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin kx}{k} dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{\cos kx}{k} dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-2\pi\frac{\cos(2k\pi)}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{k}.$$

Így a Fourier-sor:

$$\pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

A konvergenciáról szóló tétel alapján az $f(2k\pi) = \pi$ választás kell ahhoz, hogy a Fourier-sor előállítsa a függvényt a szakadási helyen.

Megjegyezzük, hogy az $x = \frac{\pi}{2}$ helyettesítés a következőt adja:

$$\frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2}) = \pi - 2(\sin\pi + \frac{\sin 2\pi}{2} + \frac{\sin 3\pi}{3} + \dots) =$$

$$\pi - 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots),$$

ezért

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots,$$

ami nem olyan meglepő, mivel tanultuk, hogy

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots \qquad \text{ha } -1 < x < 1,$$

ami a fentiek alapján $x = 1$ (és $x = -1$) esetén is igaz.

2. Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) = \sin^3 x$$

függvényt!

Olyan a_0, a_k, b_k valós számokat kell találnunk, amelyekkel

$$\sin^3 x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

A linearizációs formulák szerint:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \sin x =$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x =$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x + \sin(-x)) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

azaz a nemnulla Fourier-együtthatóák: $b_1 = \frac{3}{4}$ és $b_3 = -\frac{1}{4}$.

4. Páros és páratlan függvények

Az alábbiakban azt gondoljuk meg, hogy páros és páratlan függvények esetén hogyan egyszerűsödik le az együtthatók kiszámítása.

A továbbiakban felhasználjuk, hogy ha $g(x)$ egy 2π szerint periodikus függvény, akkor a $[\pi, 2\pi]$ intervallumon vett integrál megegyezik a $[-\pi, 0]$ intervallumon vett integrállal, ezért

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx.$$

1. Legyen $f(x)$ egy páros függvény. Ekkor $f(x)$ párossága miatt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,$$

továbbá $f(x)\cos kx$ párossága miatt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx.$$

Mivel $f(x)\sin kx$ páratlan, ezért

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0,$$

tehát a Fourier-sor nem tartalmaz szinuszos tagokat, emiatt ezt a Fourier-sort tiszta koszinuszos Fourier-sornak mondjuk.

2. Most legyen $f(x)$ egy páratlan függvény. Ekkor $f(x)$ páratlansága miatt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

továbbá $f(x)\cos kx$ páratlansága miatt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0$$

Mivel $f(x)\sin kx$ páros, ezért

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx,$$

emiatt ez a Fourier-sor csak szinuszos tagokat tartalmaz, ezért ezt tiszta szinuszos Fourier-sornak mondjuk.

Példák:

1. Fejtsük tiszta szinuszos Fourier-sorba az

$$f(x) = x(\pi - x) \qquad 0 \le x \le \pi$$

függvényt!

Megoldás: A függvényt a $[-\pi, 0]$ intervallumon úgy egészítjük ki, hogy a $[-\pi, \pi]$ intervallumban páratlan legyen. Erre a függvényre már alkalmazhatjuk a fenti képleteket. A részleteket mellőzve a következőt kapjuk

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(2k-1)x dx = \frac{8}{(2k-1)^3\pi},$$

azaz

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right)$$

2. Magyarázza meg, hogy a korábban kiszámolt

$$f(x) = x, \qquad 0 < x < 2\pi$$

2π szerint periodikus függvény Fourier-sora miért nem tartalmaz koszinuszos tagot!

Megoldás: Tekintsük a $g(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}$ függvényt. Ez már páratlan lesz, emiatt az ő Fourier-sora csak szinuszos tagokat tartalmaz. Ehhez a Fourier-sorhoz hozzáadva $\frac{\pi}{2}$-et megkapjuk $f(x)$ Fourier-sorát.

5. T szerint periodikus függvények Fourier-sora

Tegyük fel, hogy $f(x)$ egy T szerint periodikus, a $[0, T]$-ben Riemann integrálható függvény. Ekkor őt a következő alakú Fourier-sorba fejthetjük:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2k\pi}{T}x + b_k \sin\frac{2k\pi}{T}x,$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2k\pi}{T}xdx$$

és

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2k\pi}{T}xdx.$$

A konvergenciára hasonló tétel mondható ki, mint ami a 2π szrint periodikus függvényekre vonatkozik. A részleteket mellőzzük.