Matematika A2

10. feladatsor

1. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat!
   (a) $z = 19 - x^2 - y^2$
   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (c) $x^2 - y^2 = z$
   (d) $x^2 + 4z^2 = 16$
   (e) $z^2 - y^2 = 1$
   (f) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$
   (g) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$
   (h) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
   (i) $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$
   (j) $y^2 - z^2 = 4$
2. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem!
   (a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$
   (b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
3. Határozzuk meg a határértékeket!
   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$
   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$
4. Az (x, y)-sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?
   (a) $f(x, y) = \sin(x + y)$
   (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
5. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik $(x, y) \to (0, 0)$ esetén!
   (a) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$
   (b) $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$
   (c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$
6. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x,y) = e^{xy} \ln y$

(d) $f(x,y) = \log_y x$

7. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat!

(a) $f(x,y) = x^2 y + \cos y + y \sin x$

(b) $f(x,y) = \ln(x + y)$

8. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben f_{xy}-t: először x-szerint vagy először y-szerint?

(a) $f(x,y) = x \sin y + e^y$

(b) $f(x,y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$

(c) $f(x,y) = x \ln xy$

9. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y)$ függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

Laplace-egyenletnek! (14.3: 65, 66)

(a) $f(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $D = \Re^2 / \{(0,0)\}$ tartományon.

10. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

(a) $f(x,y) = y - x$, $P_0(2,1)$

(b) $f(x,y) = y - x^2$, $P_0(-1,0)$

11. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, $\mathbf{A}$ irányában!

(a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(2,1)$, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(b) $f(x,y,z) = xy + e^{x-y}$, $P_0(1,1)$, $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

12. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott P_0 pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $P_0(1,1)$

(b) $f(x,y) = x + y + xy$, $P_0(0,0)$