Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Matematika A2 vizsga megoldása Név:

2013. június 18., 9-11., Építőmérnöki BSc szak Neptun kód:

Az utolsó három feladatból összesen el kell érni 30%-ot!

1. (a) *(3 pont)* Definiálja a V vektortérben az $< \underline{u}, \underline{v} >$ skalárszorzatot!

   Megoldás: Egy V vektortérben skalárszorzatnak nevezünk egy olyan műveletet, amely bármely $\underline{u}, \underline{v} \in V$ vektorokhoz hozzárendel egy $< \underline{u}, \underline{v} >$ -vel jelölt valós számot úgy, hogy a következő tulajdonságok teljesülnek:

   (a) $< \underline{u}, \underline{v} >=< \underline{v}, \underline{u} >$, minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-re

   (b) $< \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} >=< \underline{u}, \underline{w} > + < \underline{v}, \underline{w} >$, minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$-re

   (c) $< (\alpha \underline{u}), \underline{v} >= \alpha < \underline{u}, \underline{v} >$, minden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{u}, \underline{v} \in V$-re

   (d) $< \underline{u}, \underline{u} >\geq 0$, minden $\underline{u} \in V$-re, továbbá $< \underline{u}, \underline{u} >= 0$ akkor és csak akkor ha $\underline{u} = \underline{0}$.

   (b) *(3 pont)* Skalárszorzatot alkot-e az $\mathbb{R}^3$-ben az $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok esetén az $< \underline{u}, \underline{v} >= u_1 v_1 + u_2 v_2$?

   Megoldás: Akkor lenne a leírt művelet skalárszorzat ha teljesítené a fenti (a)-(d) tulajdonságokat. Azonban könnyen látható, hogy az $\underline{u} = (0, 0, 1)$ vektorra az $< \underline{u}, \underline{u} >= 0^2 + 0^2 = 0$, de $(0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$, így a (d) tulajdonság nem teljesül, a megadott képlet nem skalárszorzatot definiál.

2. (a) *(4 pont)* Definiálja, az $f(x, y)$ függvény $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományon értelmezett kettős integrálját!

   Megoldás: Fix n-re bontsuk fel $V_1, V_2, \ldots, V_n$ diszjunkt tartományokra a T tartományt (különböző n-ekre teljesen különbözhet a felosztás). Tegyük ezt úgy, hogy ahogy n végtelenhez tart a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ felosztás finomsága 0-hoz tartson (ezen a felosztásban szereplő tartományok átmérőjének maximumát értjük, tartomány átmérője alatt pedig azt a legkisebb számot amire igaz, hogy bármely két pont nincs távolabb, mint ez a szám). Jelöljünk ki fix n-re tetszőleges $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat a megfelelő $V_1, V_2, \ldots, V_n$ halmazokból. Ezekkel jelölésekkel az $f(x, y)$ függvény $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományon (T-ről tegyük fel, hogy korlátos) értelmezett kettős integrálján a következőt limeszt értjük ha létezik és nem függ a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ finomodó felosztástól és a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok megválasztásától:

   $$\int\int_T f(x, y) \, \mathrm{d}A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) Ter(V_i),$$

   ahol $Ter(V_i)$ a V_i tartomány területét jelöli.

(b) *(3 pont)* A fenti kettős integrálnak mi a geometriai jelentése folytonos $f(x, y)$ esetén?

Megoldás: A feladat első felében adott definícióból is látszik, hogy a kettős integrál a függvény alatti előjeles térfogatot adja meg.

3. *(7 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a pozitív tagú $\sum a_n$ végtelen sorról szóló hányados kritériumot!

Megoldás:

Állítás: Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho$. Ekkor

(a) Ha $\varrho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens.
(b) Ha $\varrho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.
(c) Ha $\varrho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

Bizonyítás:

(a) Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho < 1$, akkor rögzített $\varrho < r < 1$ esetén létezik alkalmas pozitív egész N szám, hogy $n > N$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$. Így $\frac{a_{N+1}}{a_N} < r$ miatt $a_{N+1} < a_N r$. Továbbá $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r$ miatt $a_{N+2} < a_{N+1}r$, ami az előző mondatot használva tovább becsülhető: $a_{N+2} < a_N r^2$. Ezt a gondolatot folytatva adódik, hogy $a_{N+m} < a_N r^m$ tetszőleges m pozitív egészre. Így az eredeti (pozitív) sorunk felülről becsülhető az $a_1 + a_2 + \cdots + a_N + a_N r + a_N r^2 + a_N r^3 \ldots$ sorral. Utóbbiról $r < 1$ miatt könnyen látszik, hogy konvergens (az első N tag összegéhez van hozzáadva egy konvergens geometriai sor), így az eredeti $\sum a_n$ sor is konvergens (majoráns kritériumot használtuk fel).
(b) Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho > 1$, akkor létezik N alkalmas pozitív egész, hogy $n > N$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ teljesül, így ekkor $a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \ldots$. Így a pozitív elemekből álló a_n sorozat nem tart 0-hoz, vagyis a sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül, így $\sum a_n$ sor divergens.
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ esetén is teljesül, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, mégis az előbbi divergens az utóbbi pedig konvergens. Ez mutatja, hogy ebben az esetben a hányados kritérium alapján nem tudunk dönteni a konvergencia-divergencia kérdéséről.

4. *(6 pont)* Határozza meg a 2π szerint periodikus $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$ függvény Fourier-sorának első három nemnulla tagját!

Megoldás: A függvény a képlet szerint $(-\pi, \pi)$-ben x. Ezt kell aztán kiterjeszteni a teljes számegyenesre a 2π periódikusságot kihasználva (például a kiterjesztett függvény a $(\pi, 3\pi)$-ben $-2\pi + x$ - erre nem lesz szükségünk csak a megértést elősegítendő írtam bele a megoldásba). A függvény páratlan így csak a b_k együtthatók különbözhetnek 0-tól. A b_k együtthatókat a páratlanság miatt számolhatjuk a $(0, \pi)$-n való integrálással a következő módon:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \sin(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \frac{\cos(kx)}{k}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi - 0 = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

Így az

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Fourier sor első 3 nemnulla tagja a következő függvény:

$$2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2\sin(3x)}{3}.$$

5. *(7 pont)* Határozza meg, hogy mely a érték esetén lesz egyértelmű, végtelen sok megoldása vagy nem lesz megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldása, akkor adja meg az összes megoldást!

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 6 \\ x + ay + z &= 6 \\ x + y + az &= 6 \end{aligned}$$

Megoldás: Az a paraméter tetszőleges értéke mellett próbáljuk megoldani a fenti egyenletrendszert. Írjuk fel a Gauss-eliminációban szokásos kibővített mátrixot, majd hajtsunk végre kényelmes sorcserét, ezután az első vezéregyes alatti elemeket a tanult módon nullázzuk ki (vonjuk ki a második sorból az első sort a harmadikból pedig az első sor a-szorosát):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 6 \\ 1 & a & 1 & 6 \\ 1 & 1 & a & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 6 \\ 1 & a & 1 & 6 \\ a & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 6 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 6-6a \end{array}\right)$$

Ezen a ponton kényelmes leosztani a második sort $(a-1)$-el, de ezt csak akkor tehetjük meg ha $a \neq 1$. Így a továbblépés előtt az $a = 1$ esetet meg kell külön vizsgálni. Ebben az esetben a fenti elimináció így folytadódik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 6 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 6-6a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Így az $a = 1$ esetben végtelen sok megoldás van: $(6 - s - t, s, t), s, t \in \mathbb{R}$ alakú vektorok (az y és z változók oszlopában nem volt vezéregyes, ezért lettek ők a szabad paraméterek - persze más ekvialens felírása a végtelen sok megoldásnak is elfogadható, de érdemes a leírt általános elvet követni).

Most tegyük fel, hogy $a \neq 1$, ekkor oszthatunk $a - 1$-el, így az elkezdett levezetésünket az alábbi módon folytathatjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 6 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 6-6a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 6-6a \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2-((1-a)(-1)) & 6-6a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & 6-6a \end{array}\right)$$

Utóbbi alakból világos, hogy ha $-a^2 - a + 2$ nem 0, akkor egyértelmű a megoldás, ami rekurzívan kifejezhető: $z = \frac{6-6a}{-a^2-a+2}$, $y = z = \frac{6-6a}{-a^2-a+2}$, $x = 6 - y - az = 6 - \frac{6-6a}{-a^2-a+2} - \frac{6a-6a^2}{-a^2-a+2}$. Ebben az alakban elfogadható a megoldás, de megjegyzem, hogy az $-a^2 - a + 2 = -(a-1)(a+2)$ összefüggést felhasználva tovább lehet egyszerűsíteni.

Az $-a^2 - a + 2 = 0$ egyenlet gyökei az 1 és a -2. Az $a = 1$ esetet már megvizsgáltuk. Az $a = -2$ esetben az előbbi elimináció utolsó sora $(0, 0, 0|18)$, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Összefoglalva $a = -2$ esetén nincs megoldás, $a = 1$ esetén végtelen sok megoldás van (lásd fent), míg az egyéb esetekben egyértelmű a megoldás (lásd fent).

6. (a) *(4 pont)* Határozza meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$. mátrix sajátértékeit, sajátvektorait!

Megoldás: Először a mátrix sajátértékeit számoljuk, amik a $\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right)$ karakterisztikus polinom gyökei. A karakterisztikus polinom:

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,5 \\ 0,5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}$$

A karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 1,5$ és $\lambda_2 = 0,5$.
Ezek után következik a sajátvektorok kiszámítása, ami minden esetben az $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right)\underline{v} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása.
Azaz $\lambda_1 = 1,5$ esetén

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ennek az egyenlterendszernek az $(t,t), t \in \mathbb{R}$ alakú vektorok a megoldásai. Ebben az altérben bázist alkot az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (tömören erre mondjuk, hogy a $\lambda_1 = 1,5$-hez tartozó sajátvektor, a következő feladatrészre való tekintettel rögtön egységhosszúként vettük fel)
$\lambda_2 = 0,5$ esetén

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ennek az egyenlterendszernek az $(-t,t), t \in \mathbb{R}$ alakú vektorok a megoldásai. Ebben az altérben bázist alkot az $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (tömören erre mondjuk, hogy a $\lambda_2 = 0,5$-hez tartozó sajátvektor, a következő feladatrészre való tekintettel rögtön egységhosszúként vettük fel)

(b) *(3 pont)* Ábrozolja az $x^2 + xy + y^2 = 1$ egyenletnek eleget tevő (x, y) pontokat!

Megoldás: A fenti egyenlet a következő mátrixszorzásos alakba írható (a mátrixszorzás elvégzése visszaadja az eredeti egyenletet):

$$(x,y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \text{ vagyis } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Ezután érdemes emlékezni arra, hogy a szimmetrikus $\underline{\underline{A}}$ mátrix ortogonálisan diagonizálható. Ehhez egymásra merőlegesnek és egységhosszúnak kell megválasztani a sajátvektorokat (előző alfeladatban pont ezt tettük, majd egy P mátrixba kell őket pakolni oszloponként:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ha csak diagonizálni szeretnénk akkor nincs jelentősége, de most fontos, hogy úgy pakoltuk be oszloponként a sajátvektorokat $\underline{\underline{P}}$-be, hogy a determinánsa 1 legyen (fordított sorrendben -1 lett volna). Mivel a sajátvektorok ortonormált rendszert alkotnak, ezért

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Így most az $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}}$ diagonizáló egyenletben a D a következő mátrix (figyelni kell a bepakolás sorrendjére):

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

A fenti előismeret birtokában nem kell mást tennünk, mint az

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{P}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ avagy } \underline{\underline{P}}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

helyettesítést elvégeznünk. Fontos, hogy ez a helyettesítés azt jelenti, hogy (x', y') a standard bázisban (x, y) koordinátájú vektor P oszlopai (sajátvektorok - bázist alkotnak) szerinti koordinátái. Ezzel a helyettesítéssel a kiinduló alakzat egyenlete lényegesen egyszerűsödik:

$$1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\underline{\underline{P}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^T \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Kihasználva a diagonizáló egyenletet illetve azt, hogy a bal oldalon szorzat transzponáltja áll, ami a transzponáltak fordított sorrendben vett szorzatával egyenlő adódik:

$$1 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1,5x'^2 + 0,5y'^2 = \frac{x'^2}{\frac{2}{3}} + \frac{x'^2}{2}.$$

Mindent egybevéve látszik, hogy a kérdéses alakzat ellipszis, amit úgy lehet lerajzolni, hogy az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ sajátvektorok alkotta elforgatott koordinátarendszerben rajzolunk egy $\sqrt{\frac{2}{3}}$ fél nagytengelyű és $\sqrt{2}$ fél kistengelyű ellipszist.

Megjegyzem, hogy ez a megoldás nagyon részletes, vizsgán elég felrajzolni a sajátvektorokat, majd az azok alkotta koordinátarendszerbe a megfelelő tengelyhosszokkal berajzolni az ellipszist (vagy hiperbolát ha az egyik sajátérték negatív).

7. *(6 pont)* Határozza meg Lagrange-multiplikátort használva az $f(x, y) = x + y$ függvény maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ körön! (Csak a Lagrange-multiplikátor használatáért jár pont!)

Ez egy feltételes optimalizálási feladat. A Lagrange multiplikátor módszer használatához először 0-ra kell rendezni a feltételt: $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Elméleti tétel garantálja, hogy az $f(x, y) = x + y$ függvény körön vett (általában feltétel melletti) maximuma (vagy általában minimuma) ott lehet ahol az alábbi háromváltozós függvénynek (eredeti függvényből kell kivonni egy új λ változó szorosát a 0-ra rendezett feltételnek) stacionárius (mindhárom derivált 0) pontja van:

$$g(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ez a következő 3 egyenletet jelenti (a λ szerinti deriváltból adódó egyenlet mindig a feltételt adja vissza):

(a) $g'_x(x, y, \lambda) = 1 - \lambda(2x) = 0$

(b) $g'_y(x, y, \lambda) = 1 - \lambda(2y) = 0$

(c) $g'_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2+y^2-1) = 0$

Az első két egyenletből adódik, hogy $\lambda(2x) = \lambda(2y)$. Mivel λ most nem lehet 0 (nem teljesülne az első két egyenlet), ezért adódik, hogy $x = y$, ezt beírva a harmadik egyenletbe kapjuk, hogy $x^2 = \frac{1}{2}$. Ebből x és így y majd λ kifejezhető (utóbbit most nem lenne muszáj megtenni, de így talán világosabb a módszer). Tehát a fenti egyenletrendszer megoldásai: $(x_1, y_1, \lambda_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(x_2, y_2, \lambda_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Így az eredeti függvény körön vett maximuma vagy az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ vagy a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$-ban van. Az $f(x,y) = x+y$ függvénybe való behelyettesítésből látszik, hogy a körön vett feltételes maximum az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$-ben van.

Megoldás:

8. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y) = e^{x+y}$ függvény kettős integrálját az $A(0,0)$, $B(1,1)$ és $C(2,0)$ csúcsú háromszög alakú tartományon!

Megoldás: A háromszög egy normáltartomány. Érdemes felírni a határoló egyenesek egyenleteit. Az A és B pontokat összekötő egyenes egyenlete $y = x$, míg a B és C pontokat összekötő egyenes egyenlete $y = 2-x$ avagy $x = 2-y$. Érdemesebb úgy felírni az integrált, hogy az y van kívül. Ekkor az y 0 és 1 között mehet, majd fix y-ra az x a háromszög két részletezett határoló egyenese között mozoghat, vagyis y és $2-y$ között. Ezt felhasználva az integrálra a következő adódik:

$$\int_0^1 \int_y^{2-y} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_y^{2-y} e^x e^y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 e^y(e^{2-y} - e^y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 (e^2 - e^{2y})\,\mathrm{d}y = e^2 - \left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1 = e^2 - (\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1+e^2}{2}.$$

Megjegyzem, hogy természetesen az integrált úgy is felírhattuk volna (végül ugyanazt kapnánk), hogy az x változó van kívül (ekkor két részre kell bontani az integrált):

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{2-x} e^{x+y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

9. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y,z) = x^2+y^2$ függvény hármasintegrálját a $T = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4, y \ge 0\}$ tartományon!

Megoldás: T a 2 sugarú origó középpontú gömbnek az xz-sík feletti része. Emiatt érdemes gömbi helyettesítést alkalmazni. Azaz $x = r\sin(u)\cos(v)$, $y = r\sin(u)\sin(v)$, $z = r\cos(u)$, míg a Jacobi-mátrix determinánsának abszolútértéke: $r^2\sin(u)$. Használva r, v, u jelentéseit könnyen adódik, hogy a határok így írhatóak: $0 \le r \le 2$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le \pi$. Így a hármasintegrál a következőképpen írható (érdemes úgy megválasztani a sorrendet, hogy csak a végén legyen nehezebb dolgunk):

$$\int\int\int_T x^2+y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^\pi \int_0^2 \int_0^\pi r^2\sin^2(u)\cdot r^2\sin(u)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}r\mathrm{d}u = \int_0^\pi \int_0^2 \pi r^4 \sin^3(u)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^\pi \frac{32\pi}{5}\sin^3(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{32\pi}{5}(1-\cos^2(u))\sin(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{32\pi}{5}(\sin(u) - \cos^2(u)\sin(u))\,\mathrm{d}u =$$
$$\frac{32\pi}{5}\left[-\cos(u) + \frac{\cos^3(u)}{3}\right]_0^\pi = \frac{128\pi}{15}.$$