1. Többváltozós függvények

1. Bevezetés

Ennek a fejezetnek a célja a kétváltozós függvények vizsgálata, ami során a 3-dimenziós felületeket szeretnénénk megérteni.

1. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt n-változós valós függvénynek hívjuk.

Az n-változós valós függvény másik jelölése:

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{ahol } w, x_i \in \mathbb{R}$$

Speciális esetek:

1. Kétváltozós függvények: $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, azaz

   $$z = f(x, y)$$

   Ezt az x, y, z 3-dimenziós térben ábrázolva egy felületet kapunk. Néhány természetes kérdés ezzel kapcsolatban:

   (a) Határozzuk meg a felület egy P_0 pontjában az érintősíkot!

   (b) Határozza meg a felület lokális minimumait és maximumait!

   (c) Határozza meg a felület és az xy sík közötti térrész térfogatát!

2. Háromváltozós függvények: $D \subset \mathbb{R}^3$, $f : D \to \mathbb{R}$, azaz

   $$w = f(x, y, z)$$

   Egy természetes kérdés ezzel kapcsolatban:

   Legyen $f(x, y, z)$ a D térrész sűrűségfüggvénye. Mekkora D tömege?

2. Felületek megadása térben

A felületek megadására három módszert ismertetünk:

1. Explicit megadási mód:

   $$z = f(x, y),$$

   azaz a felület pontjai

   $$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

   Példák:

   (a) $z = x + y$: sík, melynek egy pontja: $P_0(0, 0, 0)$, normálvektora: $n = (1, 1, -1)$

   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: $90°$-os nyílásszögű kúp, z szimmetriatengellyel az xy sik felett.

   A fenti kúp egy z tengellyel rendelkező forgásszimmetrikus alakzat. Általában a z szimmetriatengelyű forgásszimmetrikus alakzat arról ismerhető fel, hogy

   $$z = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

   alakú és ekkor ez az xz síkban lévő $z = g(x)$ függvény z tengely körüli megforgatásával kapható meg.

   Például a fenti kúp esetén $g(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2}$, ezért $g(x) = x$, így az xz síkban lévő $z = x, x \geq 0$ félegyenes megforgatásával kapjuk a felületet, ami egy kúp.

   (c) $z = x^2 + y^2$: szintén egy forgásfelület, ahol $g(\sqrt{x^2 + y^2}) = x^2 + y^2$, ezért $g(x) = x^2$, így az xz síkban lévő $z = x^2, x \geq 0$ félparabola megforgatásával kapjuk a felületet, ami egy ún. forgásparaboloid.

2. Implicit megadási nód: $F(x, y, z) = 0$, azaz a felület pontjai:

   $$\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$$

   Példák:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$: O középpontú R sugarú kör

   (b) $z^2 - x^2 - y^2 = 0$: z szimmetriatengelyű mindkét irányban végtelen, $90°$os nyilásszögű kúp

   (c) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$: egyköpenyű hiperboloid

3. Paraméters megadási mód. Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$. Legyen $r_1 : T \to \mathbb{R}$, $r_2 : T \to \mathbb{R}$, $r_3 : T \to \mathbb{R}$ függvények. A felület:

   $$\{(r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)) : (u, v) \in T\}$$

   Példák:

   (a) $(5 \cos u, 5 \sin u, v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 10$: z szimmetriatengelyű $r = 5$ sugarú $0 \leq z \leq 10$ közt lévő henger palástja

   (b) Hogyan paraméterezhtjük az R sugarú O középpontú gömböt?

   Ha az xz síkban adott az $(r_1(u), r_2(u))$, $a \leq u \leq b$ paraméterezésű görbe, akkor ezt a z tengely körül megforgatva az

   $$\{(r_1(u) \cos v, r_1(u) \sin v, r_2(u)) : a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 2\pi\}$$

   paraméterezésú felületet kapjuk.

A fenti gömbhöz az xz síkban lévő $(R\sin u, R\cos u)$, $0 \le u \le \pi$ félkört megforgatva jutunk. Így a gömb paraméterezése:

$$\{(R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u) :$$

$$0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi\}$$

3. Határérték, parciális derivált

Ebben a fejezetben a kétváltozós valós függvények vizsgálatához szükséges alapfogalmakat, tételeket adjuk meg.

2. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $(x_0, y_0) \in D$ az $f(x,y)$ függvény belső pontja, ha létezik olyan (x_0, y_0) középpontú kör, mely benne van D-ben.

3. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a D tartomány nyílt, ha minden $(x_0, y_0) \in D$ pont belső pont.

4. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $f : D \to \mathbb{R}$. Legyen az $f(x,y)$ függvény értelmezve az (x_0, y_0) körüli kicsi körön legfeljebb az (x_0, y_0)t kivéve. Ekkor azt mondjuk, hogy az $f(x,y)$ függvény határértéke az L szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ szám úgy, hogy

$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

ha

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

Jelölés: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

Példák:

1. $$\lim_{(x,y)\to(\pi/4,\pi/4)} \sin(x+y) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = 1$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0,$$

   mert

   $$|\frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0| = |\frac{x^2}{x^2+y^2}||y| \le |y|,$$

   ezért $\delta = \epsilon$ választás megfelelő.

3. A

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

   határérték nem létezik, mert ha $y = mx$ egyenes mentén közelítjük meg az O-t, akkor

   $$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{1}{1+m^2},$$

   ami ugyan állandó, de különböző m-ek esetén különböző.

A folytonosság fogalma hasonló az egyváltozós függvények esetén ltátthoz:

5. definíció. Az $f(x,y)$ függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha

1. létezik a $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$
2. létezik a $f(x_0, y_0)$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

6. definíció. Az $f(x,y)$ függvény folytonos, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

Az egyváltozós függvényeknél megszokott tulajdonságok érvényesek a határérték és folytonos függvényekre, amikor összeadunk, kivonunk, számmal szorzunk stb.

4. Parciális dervált

Legyen az $f(x,y)$ függvény egy belső pontja (x_0, y_0). Tekintsük az xy síkban lévő $y = y_0$ egyenesnek az értelmezési tartományba eső részét. Ennek a képe a felületen lévő görbe, mely az

$$\{(x, y_0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

síkban vannak. Ennek a görbének az (x_0, y_0) pontban vett érintőjének meredekségét az egyváltozós függvényeknél tanultakhoz hasonlóan értelmezzük:

$$m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Hasonlóan: tekintsük az xy síkban lévő $x = x_0$ egyenesnek az értelmezési tartományba eső részét. Ennek a képe a felületen lévő görbe, mely az

$$\{(x_0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

síkban vannak. Ennek a görbének az (x_0, y_0) pontban vett érintőjének meredekségét az egyváltozós függvényeknél tanultakhoz hasonlóan értelmezzük:

$$m = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} =$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

7. definíció. Az $f(x,y)$ függvény (x_0, y_0) pontjában vett x szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

és y-szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Jelölés: x-szerinti parciális derivált (x_0,y_0)-ban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), f'_x(x_0,y_0)$$

y-szerinti parciális derivált (x_0,y_0)-ban:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{vagy} \quad f'_y(x_0,y_0)$$

Az x-szerinti parciális deriváltat úgy számoljuk, hogy y-t konstansnak tekintjük és x-szerint, mint változó szerint deriválunk az egyváltozós függvényeknél megszokott szabályok szerint. Hasonlóan, az y-szerinti parciális deriváltat úgy számoljuk, hogy x-t konstansnak tekintjük és y-szerint, mint változó szerint deriválunk az egyváltozós függvényeknél megszokott szabályok szerint.

Példák:

1. $f(x,y)=x^2y+xy^3$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3xy^2$$

2. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}e^x$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y)^{-1/2}2xe^x+\sqrt{x^2+y}e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}(x^2+y)^{-1/2}e^x$$

3. $f(x,y,z)=x^3y^2\sin(x+z^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2\sin(x+z^2)+x^3y^2\cos(x+z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y\sin(x+z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2x^3y^2\cos(x+z^2)2z$$

Mejegyzés: A parciális deriváltak létezéséből nem következik a folytonosság, mint azt az

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{ha } xy\neq 0\\ 1 & \text{ha } xy=0\end{cases}$$

A második parciális deriváltakat az első parciális derivált továbbderiválásával kapjuk:

8. definíció. Az $f(x,y)$ függvény x-szerinti második parciális deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}$$

Hasonlóan kapjuk a további három második parciális deriváltat:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

Példa: $f(x,y)=x^2+xy^2+x^3y^2+y^3$. Ekkor

$$f'_x=2x+y^2+3x^2y^2$$

$$f'_y=2xy+2x^3y+3y^2$$

$$f''_{xx}=2+6xy^2$$

$$f''_{yx}=2y+6x^2y$$

$$f''_{xy}=2y+6x^2y$$

$$f''_{yy}=2x+2x^3+6y$$

A példában $f''_{yx}=f''_{xy}$. Ez általában is igaz:

1. tétel (Young)**.** Ha $f(x,y)$ és parciális deriváltjai $f'_x, f'_y, f''_{yx}, f''_{xy}$ léteznek egy olyan nyílt tartományon, ami tartalmazza az (x_0,y_0) pontot, és valamennyi folytonos az (x_0,y_0) pontban, akkor

$$f''_{yx}(x_0,y_0)=f''_{xy}(x_0,y_0)$$

Az egyváltozós függvényeknél a derivált fogalma a következőtt jelentette: ha

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

akkor

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\epsilon\Delta x,$$

ahol $\epsilon\to 0$, amint $\Delta x\to 0$.

Ennek mintájára igaz az alábbi tétel:

2. tétel. Tegyük fel, hogy $f(x,y)$ parciális deriváltjai léteznek egy T nyílt tartományon, mely tartalmazza az (x_0,y_0) pontot és tegyük fel, hogy f'_x és f'_y folytonosak (x_0,y_0)-ban. Ekkor az $f(x,y)$ függvény változása

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

kifejezhető

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$$

alakba, ahol $\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$, amint $\Delta x,\Delta y\to 0$ mindketten.

Ez motiválja az alábbi definíciót:

9. definíció. Tegyük fel, hogy $f(x,y)$ értelmezve van egy (x_0, y_0) pontot tartalmazó nyílt tartományon. Az $f(x,y)$ függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha $f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$ létezik, és

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

alakba, ahol $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$, amint $\Delta x, \Delta y \to 0$ mindketten. Az $f(x,y)$ függvényt differenciálhatónak mondjuk, ha az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható.

Tehát

3. tétel. Ha az $f(x,y)$ függvény f'_x és f'_y parciális deriváltjai folytonosak egy nyílt T halmazon, akkor $f(x,y)$ differenciálható a T minden pontjában.

A folytonosság definíciójából könnyen látszik az alábbi tétel:

4. tétel. Ha $f(x,y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor ott folytonos.

5. Iránymenti derivált, érintősík

Legyen az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartománya a $D \subset \mathbb{R}^2$ és legyen az $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ görbe D-ben. Ekkor a

$$w = f(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

egy egyváltozós valós függvény. Ennek deriváltjáról szól az ún. láncszabály:

5. tétel (Láncszabály)**.** Ha az $f(x,y)$ függvény f'_x, f'_y parciális deriváltjai folytonosak és $x(t), y(t)$ differenciálható függvényei t-nek, továbbá az $(x(t), y(t))$ görbe az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományában található, akkor a

$$w = f(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

egyváltozós valós függvény deriváltja:

$$\frac{dw}{dt} = f'_x(x(t), y(t))\dot{x} + f'_y(x(t), y(t))\dot{y}$$

vagy másképp

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Példa: számítsuk ki a láncszabállyal és közvetlenül is az $f(x,y) = xy$ függvény t szerinti deriváltját az $(x(t), y(t)) = (\cos t \sin t)$ görbe mentén!

A parciális deriváltak mintájára tekinsük az alábbi kérdést. Legyen az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának egy belső pontja (x_0, y_0), és legyen $\underline{v} = (v_1, v_2)$ egy $|\underline{v}| = 1$ vektor. Tekintsük az (x_0, y_0) ponton átmenű $\underline{v}$ irányvektorú egyenesnek azt a részét, mely az értelmezési tartományba esik. Ez a felületen meghatároz egy görbét.

Kérdés: Mekkora ennek a görbének az (x_0, y_0) ponthoz tartozó meredeksége?

Megoldás: A kérdésre a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

határérték adja meg. Ezt a láncszabállyal számljuk ki, ahol

$$x(t) = x_0 + v_1 t$$

$$y(t) = y_0 + v_2 t$$

A láncszabály az alábbit adja:

$$m = f'_x(x_0, y_0)v_1 + f'_y(x0, y_0)v_2$$

10. definíció. Legyen az $f(x,y)$ függvény értelmezési tartományának egy belső pontja (x_0, y_0) és $\underline{v} = (v_1, v_2)$ egy $|\underline{v}| = 1$ vektor. Ekkor az $f(x,y)$ függvény (x_0, y_0) pontjában vett $\underline{v}$ irányú iránymenti deriváltja:

$$f'_x(x_0, y_0)v_1 + f'_y(x0, y_0)v_2$$

Jelölés: $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0)$

Példa: Legyen $f(x,y) = x^2 + xy^3$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, és $\underline{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
Ekkor

$$f'_x = 2x + y^3,$$

$$f'_y = 3xy^2,$$

ezért

$$f'_x(1,2) = 10,$$

$$f'_y(1,2) = 12,$$

így

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,2) = 10 * \frac{3}{5} + 12 * \frac{4}{5} = 15,6$$

11. definíció. Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény mindkét parciális deriváltja létezik az (x_0, y_0) pontban. Ekkor a

$$gradf = (f'_x, f'_y)$$

vektort gradiensvektornak hívjuk.

A gradiensvektor egy másik jelölése: ∇f

A gradinsvektort használva az iránymenti derivált az alábbi skalárszorzatként is írható:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = gradf\underline{v}$$

Kérdés: Melyik irányba kapjuk a legnagyobb iránymenti deriváltat, azaz merre emelkedik legjobban a felület?

Megoldás: Jelölje γ a $gradf$ és a $\underline{v}$ vektorok közti szöget. Ekkor a skalárszorzat definíciója szerint:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = |gradf||\underline{v}|\cos\gamma = |gradf|\cos\gamma,$$

ami akkor maximális, ha $\gamma = 0$, azaz, ha $\underline{v}$ a $gradf$ irányába mutató egységvektor.

Hasonlóan okoskodva kapjuk, hogy a legkisebb iránymenti deriváltat $-gradf$ irányába kapjuk.

Feladat: Határozza meg az $f(x,y)$ felület $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ pontjához tartozó érintősíkot!

Megoldás: A sík egyenletének meghatározásához egy pontra és a normálvektorra van szükség. Most egy pontját ismerjük, a normálvektort kell meghatároznunk.
Ha ismerjük a sík két nem párhuzamos vektorát, akkor ezek vektoriális szorzata lesz a normálvektor. Nyilván az érinitősíkban lesz az x- ill y-szerinti parciális deriváltnál bevezetett felületi görbék érintővektorai. Ezek:

$$\underline{v}_x = (1, 0, f'_x)$$

$$\underline{v}_y = (0, 1, f'_y)$$

Ekkor a vektoriális szorzat:

$$\underline{v}_x \times \underline{v}_y = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, .f'_y, 1),$$

ezért ennek (-1)-szerese jó lesz normálvektornak:

$$\underline{n} = (f'_x, f'_y, 1),$$

ezért az érintősík egyenlete:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

Példa: $f(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2$ érintősíkja $(2,1)$-ben

Az érintősík

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

alakba is írható, ahol a jobboldalt az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0)-ban vett elsőrendő Taylor-polinomjának mondjuk.

6. Kétváltozós függvény lokális szélsőértéke

12. definíció. Az $f(x,y)$ függvény egy (x_0,y_0) belső pontjában lokális minimuma (maximuma) van, ha létezik egy olyan (x_0,y_0)-t tartalmazó kis kör, hogy minden abban lévő (x,y) pont esetén $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ $(f(x,y) \leq f(x_0,y_0))$.

Megjegyzés: Ha egy (x_0,y_0) pontban szélsőérték van és ott létezik érintősík, akkor ott az vízszintes, ami azt jelenti, hogy

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0$$

13. definíció. At $f(x,y)$ függvény egy kritikus pontja az (x_0,y_0), ha vagy

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0$$

vagy legalább az egyik parciális derivált nem létezik.

Megjegyzés. Tehát szélsőérték csak kritikus pontban lehet.

At $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontban vett másodrendű Taylor-polinomja:

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$\frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2)$$

Ha

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

akkor

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y +$$

$$\frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2) +$$

$$"pici"$$

ahol a "pici" jelentése az, hogy ha Δx és Δy elég kicsi, akkor ez a rész elhanyogolhatóan pici az összegben szereplő tagokhoz képest, ezért a felület szélsőértékeinek meghatározásánál ezzel nem kell foglalkozni, elég eldöntenünk azt, hogy a másodrendő Taylor-polinomnak van-e szélsőértéke (x_0,y_0)-ban.

Tudjuk, hogy ha van szélsőértéke, akkor

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0$$

és $f(x_0,y_0)$ csak a magasságot határozza meg, ezért elég az

$$f''_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2 =$$

$$(\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0,y_0) + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + f''_{yy}(x_0,y_0)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \right)$$

kifejezést megvizsgálnunk a szélsőérték szempontjából. A szorzat második tényezője $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-ben egy másodfokú polinom. Ez állandó előjelű, ha a diszkrimináns negatív. Most a diszkrimináns:

$$(2f''_{xy}(x_0,y_0))^2 - 4f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0).$$

Emiatt ha

$$(2f''_{xy}(x_0,y_0))^2 - 4f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) < 0$$

és

1. $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor

$$(\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \right) \geq 0,$$

így (x_0, y_0)-ban lokális minimum van

2. $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor

$$(\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \right) \leq 0,$$

így (x_0, y_0)-ban lokális maximum van.

Ha a diszkrimináns pozitív, azaz

$$(2f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - 4f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > 0,$$

akkor

$$(\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \right)$$

értéke pozitív és negatív is lesz, emiatt nem lesz szélsőérték, ekkor azt mondjuk, hogy (x_0, y_0) pont nyeregpont.

Összefoglalva: a lokális szélsőértékek megkeresése két lépésből áll $f(x, y)$ mindenhol legalább kétszer parciálisan differenciálható függvények esetén:

1. Megkeressük a kritikus pontokat az

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

egyenletrendszer megoldásával. Igy kapjuk a $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ pontokat.

2. Felírjuk az ún. Hesse-determinást:

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

és megvizsgáljuk a P_i pontokban.

(a) Ha

$$H(x_i, y_i) > 0$$

akkor

i. $f''_{xx}(x_i, y_i) > 0$ esetén lokális minimum van P_i-ben

ii. $f''_{xx}(x_i, y_i) < 0$ esetén lokális maximum van P_i-ben

(b)

$$H(x_i, y_i) < 0,$$

akkor nincs szélsőérték, ún. nyeregpont van.

(c) Ha

$$H(x_i, y_i) = 0,$$

akkor további vizsgálatra van szükség.

Példák:

1. Határozza meg az $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$ szélsőértekeit!

(a)

$$f'_x = 4x^3 + 4y = 0,$$
$$f'y = 4y^3 + 4x = 0$$

megoldásai: $P_1 = (-1, 1)$, $P_2(0, 0)$, $P_3(1, -1)$.

(b)

$$f''_{xx} = 12x^2$$
$$f''_{xy} = 4$$
$$f''_{yy} = 12y^2,$$

ezért

$$H = 144x^2y^2 - 16.$$

Innen

i.

$$P_1: \quad H(-1, 1) = 128 > 0, f''_{xx}(-1, 1) = 12 > 0,$$

ezért lokális minimum P_1-ben

ii.

$$P_2: \quad H(0, 0) = 16 < 0,$$

ezért nyeregpont van P_2-ben.

iii.

$$P_3: \quad H(1, -1) = 128 > 0, f''_{xx}(1, -1) = 12 > 0,$$

ezért lokális minimum van P_3-ban.

2. Határozza meg az R sugarú félgömbből kivágható legnagyobb térfogatú téglatest oldalainak hosszát (feltesszük, hogy minden csúcs a felszínen van).

Megoldás: A félgömböt egy félgömbhéj és egy körlemez határolja. Legyen a téglatest körlemezen lévő lapjának oldalai: x, y. Ekkor a Pitagorasz-tételből kapjuk, hogy a harmadik oldal:

$$z = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}},$$

tehát a téglatest térfogata

$$V = V(x, y) = xy\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}$$

Ennek maximumát keressük meg.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} - \frac{x^2 y}{4\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} - \frac{x y^2}{4\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}} = 0$$

Ennek - figyelembe véve, hogy $x, y > 0$ - a megoldása

$$x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}R,$$

és a Hesse-determináns felírása után látszik, hoy itt maximum van.

3. Legkisebb négyzetek módszere: Határozza meg az $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ pontokat legjobban közelítő

$$Ax + B$$

egyenesben szereplő A, B értékeket, ahol a legjobb közelítést a

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - (Ax_i + B))^2$$

minimálissá tételével szeretnénk elérni.

Megoldás: Legyen

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (Ax_i + B))^2$$

Ennek a minimumát kell meghatároznunk. Ehhez

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (Ax_i + B))(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (Ax_i + B))(-1) = 0$$

Az egyenleteket (-2)-vel osztva kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - B\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - A\sum_{i=1}^{n} x_i - Bn = 0$$

Ezt az A, B-ben lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$A = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{(\sum_{i=1}^{n})^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$B = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i - A\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

(b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial B \partial A} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B^2} = \sum_{i=1}^{n} n$$

Ezért

$$H = n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 > 0$$

(ez az ún. számtani-négyzetes egyenlőtlenség, ha nem minden x_i megegyezik.)