1. Vektorterek

1. Bevezetés, definíció és altér

Az

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert az

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektorokkal tömören úgy is írhatjuk, hogy

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b},$$

ahol az $\underline{a}_i$ vektorok ún. m-dimenziós euklideszi vektorok. Az ilyen vektorok összességét $\mathbb{R}^m$-mel jelöljük. Ezek összeadását és skalárral való szorzását a 3-dimenzióban megszokott módon komponensenként végezzük el.
Ennek a fejezetnek a célja, hogy a 3-dimenziós vektorokat általánosítsuk, ebben az általánosításban a koordinátatengelyeket megértsük, és elérjük, hogy lehetőleg merőleges koordinátatengelyekkel rendelkezzünk. Az általánosított tér neve vektortér:

1. definíció. Legyen V egy nemüres halmaz, amelyen két műveletet értelmezünk:

1. összeadás: minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-hez hoozárendelünk egy $\underline{u} + \underline{v}$-vel jelölt $\underline{V}$-beli elemet;
2. skalárral való szorzás: minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u} \in V$-hoz hozzárendelünk egy $\alpha\underline{u}$ szintén V-beli elemet.

Ha ezek a műveletek rendelkeznek az alábbi tulajdondonságokkal, akkor V-t valós vektortérnek mondjuk:

1. minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in V$
2. minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
3. minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
4. létezik nullelem: $\underline{0}$: minden $\underline{v} \in V$ esetén $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$;
5. létezik inverz: minden $\underline{v} \in V$ esetén létezik $-\underline{v}$: $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$;
6. minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u} \in V$ esetén $\alpha\underline{u} \in V$;
7. minden $\underline{v} \in V$ esetén $1\underline{v} = \underline{v}$;
8. minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$;
9. minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$;
10. minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$.

Példák vektortérre:

1. A valós komponensű m-dimenziós vektorok tere ($\mathbb{R}^m$) a szokásos összeadással, skalárral szorzással.
2. A valós komponensű $m \times n$-es mátrixok tere ($\mathbb{R}^{m \times n}$) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
3. A legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok tere (P_n) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
4. A legfeljebb n-edfokú valós együtthatós trigonometrikus polinomok tere (T_n) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
5. A minden $x \in \mathbb{R}$ esetén folytonos $f(x)$ függvények tere, ahol $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, és $(cf)(x) = cf(x)$.
6. A konvergens $\sum a_n$ végtelen sorok a megismert összeadásra, skalárral való szorzásra.

Az alábbi tételek az axiómákból könnyen kiolvashatók:

1. tétel. 1. Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\underline{u} = \underline{0}$.

2. Minden $\underline{v} \in V$ esetén $0\underline{v} = \underline{0}$.
3. Minden $v \in V$ esetén $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$.

Bizonyítás: Csak 1.-et bizonyítjuk, a többi bizonyítása hasonlóan történik:
A 4. axióma szerint:

$$\lambda(\underline{v} = \underline{0}) = \lambda\underline{v},$$

ahol a bal oldal a 10. axióma szerint

$$\lambda\underline{v} + \lambda\underline{0} = \lambda\underline{v}.$$

Az 5. axióma szerint van a $\lambda\underline{v}$-nek ellentettje, amit balról mindkét oldalhoz hozzáadva kapjuk:

$$-(\lambda\underline{v}) + (\lambda\underline{v} + \lambda\underline{0}) = -(\lambda\underline{v}) + \lambda\underline{v} = \underline{0}.$$

A 3. axióma szerint a baloldalt a következőképpen csoportosíthatjuk:

$$(-(\lambda\underline{v}) + \lambda\underline{v}) + \lambda\underline{0} = \underline{0},$$

ami az 5. és 2. axióma szerint

$$\underline{0} + \lambda\underline{0} = \underline{0}.$$

Végezetül a 4. és 2. axióma szerint

$$\lambda\underline{0} = \underline{0}. \qquad \blacksquare$$

2. definíció. A V vektortér W részhalmaza altér, ha W részhalmaza V-nek és maga is vektortér a V-beli műveletekkel.

Két alteret biztosan tudunk: magát a V-t és a $\{\underline{0}\}$. Ezeket triviális altérnek mondjuk.
Egy V vektortérben lévő W részhalmaz pontosan akkor alkot alteret, ha az összeadásra és a skalárral való szorzásra zárt.

2. tétel. A W valódi altér V-ben akkor és csak akkor, ha

1. minden $\underline{u}, \underline{v} \in W$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in W$
2. minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in W$ esetén $\alpha\underline{v} \in W$.

Bizonyítás: Ha W altér, akkor az 1. és 6. axiómák szerint 1. és 2. teljesül.,
Ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in W$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in W$ és minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in W$ esetén $\alpha\underline{v} \in W$, akkor az 1. és 6. axiómák nyilván teljesülnek. Mivel 2., 3., 7., 8., 9., 10. axiómák igazak V-ben, tehát most is. Mivel $0 \in \mathbb{R}$, ezért $\underline{v} \in V$ estetén $0\underline{v} = \underline{0} \in W$, tehát van nullelem W-ben, ami 4.-et bizonyítja. Mivel $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$, ezért ellentettünk is van, ami 5.-öt bizonyítja. ■
Pédák altérre:

1. $\mathbb{R}^3$-ben az origón átmenő síkok és egyenesek valódi alteret alkotnak.
2. $\mathbb{R}^m$-ben az olyan vektorok, amelyek utolsó koordinátája 0.
3. A mindenhol folytonos függvények vektorterében azok a függvények, amelyek mindenhol deriválhatók.
4. Legyen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ekkor a
$$V = \{\underline{x} : x \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}\}$$
altér $\mathbb{R}^n$-ben.
5. Legyen V egy vektortér és $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in V$. Ekkor
$$\{\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k : \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$
halmaz altér V-ben. A $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k$ összeget lineráris kombinációnak hívják. Ezt a vektorteret a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in V$ vektorok által generált altérnek hívják. Jelölés:
$$lin\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}.$$
Megmutatható, hogy ez a legszűkebb olyan altér amely tartalmazza $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in V$ vektorokat.
Például $\mathbb{R}^3$-ben a $\underline{v}_1 = (1,0,0)$ és $\underline{v}_2 = (0,1,0)$ vektorok által generált altér az xy sík.

3. definíció. A V vektortérnek a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m \in V$ vektorok generátorrendszere (G), ha
$$lin\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\} = V$$

Példák:

(a) $\mathbb{R}^3$-ben G:
$$\underline{v}_1 = (1,0,0), \quad \underline{v}_2 = (0,1,0), \quad \underline{v}_3 = (0,0,1).$$

(b) T_n-ben G:
$$\underline{v}_1 = 1, \quad \underline{v}_2 = x, \underline{v}_3 = x^2, \ldots, v_{n+1} = x^n.$$

Ha
$$lin\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m\} = V$$
és egy vektor pl. v_m felírható a többi lineáris kombinációjaként, azaz
$$v_m = \mu_1\underline{v}_1 + \mu_2\underline{v}_2 + \cdots + \mu_{m-1}\underline{v}_{m-1},$$
akkor
$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_m\underline{v}_m =$$
$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_m\underline{v}_{m-1}+$$
$$\lambda_m(\mu_1\underline{v}_1 + \mu_2\underline{v}_2 + \cdots + \mu_{m-1}\underline{v}_{m-1}) =$$
$$(\lambda_1 + \lambda_m\mu_1)v_1 + (\lambda_2 + \lambda_m\mu_2)v_2 + \cdots +$$
$$+(\lambda_{m-1} + \lambda_m\mu_{m-1})v_{m-1},$$
ezért
$$lin\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m\} = lin\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{m-1}\} = V$$

4. definíció. Ha a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\} \in V$ olyan halmazok, amelyekre egyetlen $\underline{v}_i$ vektor sem írható fel a többi lineáris kombinációjaként, akkor ezeket a vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük.

3. tétel. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a
$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0}$$
egyenletnek csak a triviális: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ megoldása van.

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek. Tegyük fel, hogy van olyan
$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0},$$
ahol valamely $\lambda_i \not{0}$. Ekkor
$$\underline{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\underline{v}_1 + \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\underline{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\underline{v}_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\underline{v}_k,$$
tehát a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok nem lineárisan függetlenek (ekkor azt mondjuk, hogy lineárisan összefüggők), ami ellentmondás.
Ha
$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0}$$
egyenletnek csak triviális van, akkor
$$v_i \neq \mu_1\underline{v}_1 + \cdots + \mu_{i-1}\underline{v}_{i-1} + \mu_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \cdots + \mu_k\underline{v}_k$$

nem lehet, mert különben

$$\mu_1\underline{v}_1+\cdots+\mu_{i-1}\underline{v}_{i-1}-\underline{v}_i+\mu_{i+1}\underline{v}_{i+1}+\cdots+\mu_k\underline{v}_k=\underline{0}$$

egy nemtriviális lineáris kombináció, ami ellentmondás. ■
Példa: $\mathbb{R}^4$-ben a

$$\underline{v}_1=(3,2,0,4),\quad \underline{v}_2=(4,3,2,0),\quad v_3=(1,1,1,1)$$

vektorok lineárisan függetlenek.
A következő fogalom alapvető a vektorterek elméletében:

5. definíció. Legyen V egy vektortér. A $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k\}$, $\underline{v}_i\in V$ bázisa V-nek, ha

(a) B lineárisan független

(b) B generátorrendszere V-nek.

Példák:

(a) $\mathbb{R}^m$-ben bázis:

$$\underline{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \underline{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix},\dots,\underline{e}_m=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

ezt $\mathbb{R}^m$ természetes bázisának hivjuk.

(b) $\mathbb{R}^2$-ben bázisok:

i. természetes bázis:

$$\underline{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \underline{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ii. egy másik bázis:

$$\underline{b}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \underline{b}_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

(c)

$$P_n=\{a_0+a_1v+\cdots+a_nx^n:\quad a_i\in\mathbb{R}^m$$

bázisa:

$$\{1,x,x^2,\dots x^m\}$$

A V vektorteret véges dimenziósnak mondjuk, ha van véges sok vektort tartalmazó bázisa; egyébként a vektortér végtelen dimenziós. Mi csak véges dimenziós vektorterekkel foglalkozunk. Azt fogjuk megmuatni, hogy ha a V vektortér véges dimenziós, akkor két bázisnak ugyanannyi az elemszáma. Ez az alábbi tételen alapul:

4. tétel. Ha az

$$\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_n$$

V vektortérbeli vektorok lineárisan függetlenek és

$$\underline{g}_1,\dots,\underline{g}_k$$

vektorok V generátorrendszerét alkotják, akkor

$$n\le k.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $n>k$ és ellentmondást abból kapunk, hogy megmutatjuk, hogy a

$$\lambda_1\underline{f}_1+\cdots+\lambda_n\underline{f}_n=\underline{0}$$

egyenletnek nem csak triviális (minden $\lambda_i=0$) megoldása van.
Mivel $\underline{g}_1,\dots,\underline{g}_k$ generátorrendszert alkot, emiatt

$$\begin{array}{lllllll}\underline{f}_1 & = & a_{11}\underline{g}_1 & + & a_{21}\underline{g}_2 & +\dots & a_{k1}\underline{g}_k\\ \underline{f}_2 & = & a_{12}\underline{g}_1 & + & a_{22}\underline{g}_2 & +\dots & a_{k2}\underline{g}_k\\ \vdots & & & & & & \\ \underline{f}_n & = & a_{1n}\underline{g}_1 & + & a_{2n}\underline{g}_2 & +\dots & a_{kn}\underline{g}_k,\end{array}$$

alkalmas $a_{ij}\in\mathbb{R}$ konstansokkal. Ekkor

$$\underline{0}=\lambda_1\underline{f}_1+\cdots+\lambda_n\underline{f}_n=$$

$$\lambda_1(a_{11}\underline{g}_1+a_{21}\underline{g}_2+\dots a_{k1}\underline{g}_k)+$$

$$\lambda_2(a_{12}\underline{g}_1+a_{22}\underline{g}_2+\dots a_{k2}\underline{g}_k)+$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n(a_{1n}\underline{g}_1+a_{2n}\underline{g}_2+\dots a_{kn}\underline{g}_k)=$$

$$(\lambda_1a_{11}+\lambda_2a_{12}+\cdots+\lambda_na_{1n})\underline{g}_1+$$

$$(\lambda_1a_{21}+\lambda_2a_{22}+\cdots+\lambda_na_{2n})\underline{g}_2+$$

$$\vdots$$

$$(\lambda_1a_{k1}+\lambda_2a_{k2}+\cdots+\lambda_na_{kn})\underline{g}_k.$$

Ez biztosan teljesül, ha az együtthatók 0-k, azaz:

$$\lambda_1a_{11}+\lambda_2a_{12}+\cdots+\lambda_na_{1n}=0$$

$$\lambda_1a_{21}+\lambda_2a_{22}+\cdots+\lambda_na_{2n}=0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1a_{k1}+\lambda_2a_{k2}+\cdots+\lambda_na_{kn}=0.$$

Mivel feltettük, hogy $n>k$, ezért ennek, a λ_i-ket tekintve ismeretleneknek, homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása, ami ellentmondás. ■

5. tétel. Ha a véges dimenziós vektortérnek $B_1 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ és $B_2 = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ bázisai, akkor $n = m$

Bizonyítás: Mivel B_1 bázis, ezért generátorrendszer is és mivel B_2 bázis, ezért lineárisan független. Ezért az előző tétel szerint

$$n \geq m$$

Másrészt mivel B_2 bázis, ezért generátorrendszer is és mivel B_1 bázis, ezért lineárisan független. Ezért az előző tétel szerint

$$m \geq n$$

ez alapján

$$n = m \qquad \blacksquare$$

Most már tudjuk értelmezni a vektortér dimenzióját:

6. definíció. Ha V egy véges dimenziós vektortér, akkor egy bázisban lévő vektorok számát a vektortér dimenziójának mondjuk. Jelölés: $\dim V$.

Példák:

(a) $\dim \mathbb{R}^m = m$

(b) $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$

(c) $\dim P_n = n + 1$

A következő tétel egy aránylag könnyen ellenőrizhető feltételt ad arra, hogy ha tudjuk, hogy $\dim V = n$, akkor eldöntsük, hogy adott n db vektor bázist alkot-e.

6. tétel. Tegyük fel, hogy a V vektortérre $\dim V = n$. Ekkor

(a) ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor bázist alkotnak;

(b) ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok generátorrendszert, akkor egyben bázisok.

Bizonyítás: a. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Azt kell megmutatnunk, generátorrenszert alkotnak. Indirekt módon tegyük fel, hogy nem alkot generátorrendszert, azaz létezik $v \in V$, amelyre

$$\underline{v} \neq \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n.$$

Ekkor a

$$\underline{v}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$$

vektorok linárisan független rendszert alkotnak, mert ha

$$\mu_0 \underline{v} + \mu_1 \underline{v}_1 + \dots \mu_n \underline{v}_n = \underline{0},$$

akkor $\mu_0 = 0$ esetén

$$\mu_1 \underline{v}_1 + \dots \mu_n \underline{v}_n = \underline{0},$$

ami csak triviális módon lehet, mivel $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.
Míg ha $\mu_0 \neq 0$, akkor

$$\underline{v} = -\frac{\mu_1}{\mu_0} \underline{v}_1 - \dots - \frac{\mu_n}{\mu_0} \underline{v}_n,$$

ami nem lehetséges.
Ellentmondást úgy kapunk, hogy egy n dimenziós vektortérben van olyan generátorrendszer (egy bázis ilyen), amelyik n vektort tartalmaz, és itt nem lehet $n + 1$ lineárisan független vektor.
b. Ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ generátorrendszert alkot, akkor azt kell megmutatnunk, hogy egyben lineárisan független rendszer is. Ha nem így lenne, akkor lenne egy $\underline{v}_i$ vektor, amely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ekkor

$$V = lin\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = lin\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n\},$$

ezért V-nek van $n - 1$ vektort tartalmazó generátorrendszere, ami ellentmondás, mert van n vektort tartalmazó független vektorrendszer. $\blacksquare$

Mivel legtöbbször az $\mathbb{R}^m$ térben dolgozunk, ezért most megmutatjuk, hogyan határozhatjuk meg itt

$$lin\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$$

egy bázisát: Irjuk a vektorokat mint sorvektorok egymás alá egy mátrixba, majd alkalmazzuk a Gauss-eliminációt. Meggondolható, hogy a Gauss-eliminációnál alkalmazott lépések során a genárált altér nem változik. A Gauss-elimináció végén kapott mátrix nemnulla sorai adják a genarált altér bázisát.

Példa: Határozza meg $\mathbb{R}^4$ azon alterének egy bázisát, amelyet a

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \underline{v}_2 = (2, -1, 0, 3), \quad \underline{v}_3 = (3, 1, 3, 7).$$

A bázisok segítségével definiálhatjuk a koordináta fogalmát.

7. tétel. Ha $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ bázist alkotnak V-ben, akkor minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen írható

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$$

alakba.

Bizonyítás: Mivel B generátorrendszert alkot ezért van legalább egy

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$$

felírás. Tegyük fel, hogy van egy másik felírás:

$$\underline{v} = \alpha'_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha'_n \underline{b}_n.$$

Ekkor

$$\underline{0} = \underline{v} - \underline{v} = (\alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n) -$$

$$(\alpha'_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha'_n \underline{b}_n) =$$

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)\underline{b}_1 + \cdots + (\alpha_n - \alpha'_n)\underline{b}_n,$$

ami a lineáris függetlenség miatt csak úgy lehetséges, ha

$$\alpha_i = \alpha'_i \qquad \blacksquare$$

7. definíció. Ha a véges dimenziós V vektortér egy bázisa $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$, akkor a $\underline{v} \in V$ vektor koordinátája $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, ha

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n.$$

Jelölés: $(\underline{v})_B$.

A következő példa mutatja, hogy miért van szükség különböző bázisokra:

Határozza meg azokat az (x, y) pontokat, amelyekre $x^2 + xy + y^2 = 1$.
A kérdés precízen a következő: Határozza meg az

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

természetes bázisban azon $x\underline{i} + y\underline{j}$ vektorokat, amelyekre $x^2 + xy + y^2 = 1$.
A feladatot úgy oldjuk meg, hogy más bázist választunk. Legyen

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}$$

$$\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}.$$

Ha ebben az új bázisban egy pont koordnátája (x', y'), akkor

$$x'(\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}) + y'(-\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}) =$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')\underline{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')\underline{j}.$$

Ebben az új bázisban a feltétel így írható:

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y') +$$

$$+(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2 = 1,$$

azaz

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1.$$

Mivel az új bázis a természetes bázis 45˙-kal történő elforgatottja, emiatt a keresett halmaz egy olyan ellipszis, amelynek tengelyei az $(\underline{i}, \underline{j})$ által meghatározott derékszögű koordinátarendszerben 45˙ ill. 135˙-ot zárnak be.

Az előző példa is mutatja, hogy meg kell határoznunk, hogy két V-beli bázis esetén az egyikben meghatározott koordinátákból hogyan kapjuk meg a másik bázisban a koordinátákat. Ezt hivják báziscserének.
Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ és $B' = \{\underline{b}'_1, \ldots, \underline{b}'_n\}$ két bázisa a V vektortérnek. Jelölje $\underline{\underline{P}}$ azt az $n \times n$-es mátrixot, amelyik i-edik oszlopában a $(\underline{b}'_i)_B$ koordináták vannak. A $\underline{\underline{P}}$ mátrixot átmenet mátrixnak hívjuk. Megmutatható, hogy

$$(\underline{v})_{B'} = \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{v})_B.$$

Példa: Legyen $\mathbb{R}^2$ két bázisa:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ekkor

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

és innen

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát például a P(1,2) pont koordinátái B-ben $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és a megfelelő mátrixszorzás után a B'-beli koordináták $\begin{pmatrix} -0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ lesznek.
Az

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert az

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

vektorokkal tömören úgy is írhatjuk, hogy

$$\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \cdots + \underline{a}_nx_n = \underline{b}.$$

Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ bázisát alkotják és az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ jelöli a természetes bázist $\mathbb{R}^m$-ben, akkor

$$\underline{b} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + \cdots + b_n\underline{e}_n.$$

Ha az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ bázisai, akkor az egyenletrendszer megoldását báziscsereként is felfoghatjuk. Ekkor az átmenetmátrix az együtthatómátrix lesz és az $\underline{x} = \underline{\underline{A}}\underline{b}$ megoldást kapjuk.

Az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix esetén a sorvektorok $\mathbb{R}^n$-ből vannak. Az általuk generált altér a sortér; hasonlóan az oszlopvektorok $\mathbb{R}^m$-ből vannak. Az általuk generált altér az oszloptér. Megmuatható, hogy

$$\dim(\text{sortér}) = \dim(\text{oszloptér}).$$

8. definíció. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix rangja a sortér dimenziója. Jelölés: $rang(\underline{\underline{A}})$.

Megmutatható, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

8. tétel. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrixok esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) $\underline{\underline{A}}$ invertálható;

(b) az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek csak az $\underline{x} = \underline{0}$ megoldása van;

(c) az $\underline{\underline{A}}$ elemi sorműveletekkel az $\underline{\underline{I}}_n$ egységmátrixszá transzformálható;

(d) az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ megoldható;

(e) $det\underline{\underline{A}} \neq 0$;

(f) $rang(\underline{\underline{A}}) = 0$;

(g) $\underline{\underline{A}}$ sorai lineárisan függetlenek;

(h) $\underline{\underline{A}}$ oszlopai lineárisan függetlenek.

A fenti $rang(\underline{\underline{A}})$ fogalom segítségével megadható egy szükséges és elégséges feltétel a lineáris egyenletrendszer megoldására:

9. tétel. Az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) az $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható;

(b) a $\underline{b}$ az $\underline{\underline{A}}$ oszlopterében van;

(c) $rang(\underline{\underline{A}}|\underline{b}) = rang(\underline{\underline{A}})$

2. Skalárszorzatos vektorterek

Az $\mathbb{R}^3$-ben megismert skalárszorzat mintájára természetes $\mathbb{R}^n$-ben a skalárszorzatot a következőképpen definiálni: Legyen

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Ekkor

$$\underline{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

Können ellenőrizhető, hogy ez a skalrárszorzat rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(a) $\underline{uv} = \underline{vu}$, minden $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$;

(b) $(\underline{u} + \underline{v})\underline{w} = \underline{uw} + \underline{vw}$ minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$

(c) $(\alpha\underline{u})\underline{v} = \alpha(\underline{uv})$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{u}, \underline{v} \in V$

(d) $\underline{uu} \geq 0$ és $\underline{uu} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$.

Ennek általánosításaként vezetjük be a skalárszorzatot:

9. definíció. Egy V vektortérben skalárszorzatnak nevezünk egy olyan műveletet, amely bármely $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ponthoz egy $< \underline{u}, \underline{v} >$ valós számot (más néven skalár számot) rendel hozzá a következő tulajdonságokkal:

(a) $< \underline{u}, \underline{v} >=< \underline{v}, \underline{u} >$, minden $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$;

(b) $< (\underline{u} + \underline{v}), \underline{w} >=< \underline{u}, \underline{w} > + < \underline{v}, \underline{w} >$ minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ esetén

(c) $< (\alpha\underline{u}), \underline{v} >= \alpha < \underline{u}, \underline{v} >$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén

(d) $< \underline{u}, \underline{u} >\geq 0$ és $< \underline{u}, \underline{u} >= 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$.

Példák:

(a) $V = \mathbb{R}^n$,

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

$$< \underline{u}, \underline{v} >= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

(b) $V = \{f(x) :$ 2π szerint periodikus folytonos függvény$\}$:

$$< f(x), g(x) >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

10. definíció. Ha V skalárszorzatos vektortér vektortér, akkor egy $\underline{v} \in V$ vektortér hossza:

$$||\underline{u}|| = \sqrt{< \underline{u}, \underline{u} >}$$

Példa: $\mathbb{R}^n$-ben az $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ hossza:

$$||\underline{u}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

Az $\mathbb{R}^3$-ben az

$$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

vektorok távolsága:

$$|\underline{v} - \underline{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (v_i - u_i)^2}$$

Ennek általánosítása:

11. definíció. Ha V egy skalárszorzatos vektortér, akkor $\underline{u}, \underline{v} \in V$ közötti távolság:

$$d(\underline{u}, \underline{v}) = ||\underline{v} - \underline{u}||.$$

A következő cél két vektor által bezárt szöget értelmezni. Ehhez szükséges az alábbi tétel:

10. tétel. Legyen V egy skalársorzatos vektortér. Ekkor minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén

$$| < \underline{u}, \underline{v} > | \leq ||\underline{u}|| \cdot ||\underline{v}||.$$

Bizonyítás: Ha $\underline{u} = \underline{0}$, akkor mindkét oldal 0.
Tegyük fel, hogy $\underline{u} \neq \underline{0}$, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \geq ||\underline{v} - t\underline{u}|| =< \underline{v} - t\underline{u}, \underline{v} - t\underline{u} >=$$

$$< \underline{v}, \underline{v} > -2t < \underline{u}, \underline{v} > +t^2 < \underline{u}, \underline{u} > .$$

Mivel ez menden $t \in \mathbb{R}$ esetén igaz, ezért a diszkrimináns negatív, tehát

$$4 < \underline{u}, \underline{v} >^2 -4||\underline{u}|| \cdot ||\underline{v}|| \leq 0,$$

ezért

$$| < \underline{u}, \underline{v} > | \leq \sqrt{||\underline{u}|| \cdot ||\underline{v}||}. \quad \blacksquare$$

A korábban bevezetett hosszúságnak az alábbi tulajdonságai vannak:

(a) $||\underline{u}|| \geq 0$

(b) $||\underline{u}|| = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$

(c) $||\alpha\underline{u}|| = |\alpha| \cdot ||\underline{u}||$

(d) $||\underline{u} + \underline{v}|| \leq ||\underline{u}|| + ||\underline{v}||$

(d) bizonyítása:

$$||\underline{u}+\underline{v}||^2 =< \underline{u}+\underline{v}, \underline{u}+\underline{v} >= ||\underline{u}||^2+||\underline{v}||^2+2 < \underline{u}, \underline{v} >\leq$$

$$||\underline{u}||^2 + ||\underline{v}||^2 + 2||\underline{u}|| \cdot ||\underline{v}|| = (||\underline{u} + \underline{v}||)^2 \blacksquare$$

12. definíció. Legyen V egy skalárszorzatos vektortér. Az $\underline{u}, \underline{v} \in V$, $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}$ vektorok által bezárt szög α, ahol

$$\cos\alpha = \frac{< \underline{u}, \underline{v} >}{||\underline{u}|| \cdot ||\underline{v}||}.$$

A fenti definíció értelemes, mert

$$\left| \frac{< \underline{u}, \underline{v} >}{||\underline{u}|| \cdot ||\underline{v}||} \right| \leq 1.$$

13. definíció. Az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok ortogonálisak, ha

$$< \underline{u}, \underline{v} >= 0.$$

11. tétel. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok ($\underline{v_i} \neq \underline{0}$) páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: Legyen

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0}.$$

Vegyük mindkét oldal v_i-vel vett skalárszorzatát:

$$< \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k, \underline{v}_i >=< \underline{0}, \underline{v}_i > .$$

Mivel tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$< \underline{0}, \underline{v}_i >=< \alpha\underline{0}, \underline{v}_i >= \alpha < \underline{0}, \underline{v}_i >,$$

ezért

$$< \underline{0}, \underline{v}_i >= 0.$$

De

$$< \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_k\underline{v}_k, \underline{v}_i >=$$

$$< \lambda_1\underline{v}_1, \underline{v}_i > + < \lambda_2\underline{v}_2, \underline{v}_i > + \cdots + < \lambda_k\underline{v}_k, \underline{v}_i >=$$

$$\lambda_1 < \underline{v}_1, \underline{v}_i > +\lambda_2 < \underline{v}_2, \underline{v}_i > + \cdots + \lambda_k < \underline{v}_k, \underline{v}_i > .$$

Az ortogonalitás miatt

$$< \underline{v}_j, \underline{v}_i >= \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i \neq j \\ ||v_i||^2, & \text{ha} \quad i = j \end{cases}$$

ezért

$$\lambda_i ||v_i||^2 = 0,$$

tehát

$$\lambda_i = 0. \quad \blacksquare$$

Példa: T_n-ben az

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$$

függvények ortogonálisak a Fourier-soroknál tanultak szerint, ezért lineárisan függetlenek; továbbá nyilván generátorrendszert alkotnak így bázist is.

2.1. Ortogonális bázisok

12. tétel. Legyen V egy véges dimenziós, skalárszorzatos vektortér, $\dim V = n$. Ennek van olyan $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ bázisa, ahol a vektorok páronként ortogonálisak.

Bizonyítás A bizonyítás során használt algoritmust Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásnak hívják.

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ egy bázisa V-nek. Legyen

$$\underline{b}_1 = \underline{v}_1.$$

A második bázisvektort a következő alakban keressük:

$$\underline{b}_2 = \underline{v}_2 + \alpha_{21}\underline{b}_1,$$

ahol azt akarjuk, hogy $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ ortogonálisak legyenek. Ekkor

$$0 = <\underline{b}_1, \underline{b}_2> = <\underline{b}_1, \underline{v}_2 + \alpha_{21}\underline{b}_1> =$$

$$<\underline{b}_1, \underline{v}_2> + \alpha_{21} <\underline{b}_1, \underline{b}_1>,$$

ezért

$$\alpha_{21} = -\frac{<\underline{b}_1, \underline{v}_2>}{||\underline{b}_1||^2}.$$

A következő bázisvektort

$$\underline{b}_3 = \underline{v}_3 + \alpha_{31}\underline{b}_1 + \alpha_{32}\underline{b}_2$$

alakban keressük. Azt akarjuk, hogy $\underline{b}_3$ ortogonális legyen $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ vektorokra. Ezért

$$0 = <\underline{b}_1, \underline{b}_3> = <\underline{b}_1, \underline{v}_3 + \alpha_{31}\underline{b}_1 + \alpha_{32}\underline{b}_2> =$$

$$<\underline{b}_1, \underline{v}_3> + \alpha_{31} <\underline{b}_1, \underline{b}_1> + \alpha_{32} <\underline{b}_1, \underline{b}_2>.$$

Mivel $<\underline{b}_1, \underline{b}_2> = 0$, ezért

$$\alpha_{31} = -\frac{<\underline{b}_1, \underline{v}_3>}{||\underline{b}_1||^2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\alpha_{32} = -\frac{<\underline{b}_2, \underline{v}_3>}{||\underline{b}_2||^2}.$$

Ezt folytatva $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ páronként ortogonális vektorokhoz jutunk. Korábban bebizonyítottuk, hogy az ortogonalitásból következik a függetlenség, tehát dimenziószámnyi független vektort kaptunk, amiből következik, hogy bázist alkotnak. ■

14. definíció. Ha az ortogonális bázisban a bázisvektorokat elosztjuk a hosszukkal, akkor egység hosszúságú, páronként ortogonális vektorokat kapunk. Az ilyen bázis neve ortonormált bázis.

13. tétel. Ha $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ egy ortonormált bázis az V-ben, akkor $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén, ha

$$(\underline{u})_B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

és

$$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$<\underline{u}, \underline{v}> = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Bizonyítás:

$$<\underline{u}, \underline{v}> =$$

$$<u_1\underline{b}_1 + u_2\underline{b}_2 + \ldots u_n\underline{b}_n, v_1\underline{b}_1 + v_2\underline{b}_2 + \ldots v_n\underline{b}_n> =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_iv_j <\underline{b}_i, \underline{b}_j>.$$

Mivel B ortonormált rendszer, ezért

$$<\underline{b}_i, \underline{b}_j> = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Innen

$$<\underline{u}, \underline{v}> = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i. \qquad ■$$

14. tétel. Legyen B_1 és B_2 két ortonormált bázis. Ha $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}_{B_1,B_2}$ a bázisátmenet mátrix, akkor $\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1}$.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy

$$\underline{\underline{P}}^T\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}_n.$$

Legyen

$$B_2 = \{\underline{b}_1^{(2)}, \underline{b}_2^{(2)}, \ldots, \underline{b}_n^{(2)}\}.$$

Ekkor a $\underline{\underline{P}}^T$ i-edik sorában a

$$(b_i^{(2)})_{B_1}^T = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

és a $\underline{\underline{P}}$ j-edik oszlopában a

$$(b_j^{(2)})_{B_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

lesz. Innen kapjuk, hogy $\underline{\underline{P}}^T\underline{\underline{P}}$ i-edik sorának j-edik oszlopában B_1 ONB tulajdonsága miatt

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = <\underline{b}_i^{(2)}, \underline{b}_j^{(2)}> =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

a B_2 ONB volta miatt, ami bizonyítja az állítást. ■

15. definíció. Ha $\underline{\underline{A}}$ olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{\underline{A}}$ ortogonális mátrix.

A definícióból látszik, hogy

15. tétel. Ha $\underline{\underline{A}}$ ortogonális $n \times n$-es mátrix, akkor a sorvektorai és oszlopvektorai is ONB-t alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben.

3. Lineáris transzformáció

16. definíció. Legyen V és W vektorterek, $T : V \to W$ pedig egy olyan függvény, amelyre

(a) T(u+v)=T(u)+T(v), minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén

(b) $T(\alpha \underline{u}) = \alpha T(\underline{u})$ minden $\alpha \in \mathbb{B}$ és $\underline{u} \in V$ esetén.

Ekkor T-t lineáris transzformációnak nevezzük.

Példák:

(a) $\mathbb{R}^2$:

i. Vetítés az x tengelyre:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. Tükrözés az $y = x$ egyenesre:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

iii. Forgatás 90˙-kal:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

(b) $\mathbb{R}^3$:

i. Tükrözés $\underline{0} - ra$:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$$

ii. Vetítés az xy síkra:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Legyen

$$V = \{f(x) : \quad f(x) \text{ mindenhol deriválható}$$

:

$$T(f(x)) = f'(x)$$

(d) Legyen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\underline{x}$.

(e) Legyen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ n-dimenziós sorvektorok. Képezzük belőle az $n \times n$-es mátrixot. Ha az i-edik sort kivéve rögzítjük a a sorvektorokat, akkor így egy

$$T(\underline{a}_i) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$$

fügvényt kapunk. Ez egy lineáris transzformáció.

3.1. Determináns geometriai jelentése

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a dterminánsnak mi a geometria jelentése. Látni fogjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ sorokat tartalmazó $n \times n$-es determináns az ezen vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg. Jelölje (a még nem definiált) térfogatot

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$$

Mit várunk el egy előjeles térfogattól?
Vizsgáljuk az $\mathbb{R}^2$-et! Terészetes feltevés, hogy

$$V(\underline{a}_1' + \underline{a}_1'', \underline{a}_2) = V(\underline{a}_1', \underline{a}_2) + V(\underline{a}_1'', \underline{a}_2)$$

ábra!!!!!
Hasonlóan természetes, hogy

$$V(\alpha \underline{a}_1, \underline{a}_2) = \alpha V(\underline{a}_1, \underline{a}_2).$$

Ha az $\mathbb{R}^3$-re tekintünk, akkor ott ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok egy síkban vannak, akkor

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = 0$$

ezért természetes azt elvárni egy előjeles térfogattól, hogy ha

$$\dim lin\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\} < n \quad \Rightarrow V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = 0$$

Végül természetes azt megkívánnunk, hogy az egységkocka térfogat 1 legyen, azaz, ha $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ jelöli a természetes bázist, akkor

$$V(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n) = 1.$$

Az alábbi tétel mutatja, hogy ezek a követelmények már egyértelműen meghatározzák az előjeles térfogatot és így éppen adeterminánst kapjuk:

16. tétel. Legyen $\underline{a}_i \in \mathbb{R}^n$. Ekkor ha a $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$ függvényre teljesül, hogy

(a) $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$ bármely vektorát kivéve a többit rögzítettnek vesszük, a kapott függvény lineráris transzformáció;

(b) ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ legfeljebb $n-1$ dimenziós alteret alkot, akkor

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = 0;$$

(c) $V(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n) = 1$

akkor

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n).$$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a determinánsra teljesülnek a megkívánt tulajdonságok, így csak azt kell megmutatnunk, hogy nincs más megfelelő $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$ függvény. Először azt mutatjuk meg, hogy két vektort felcserélve a $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$ függvény előjelet vált. Tudjuk, hogy ha két megegyező vektorunk van, akkor az előjeles térfogat 0. Emiatt pl.

$$0 = V(\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n) =$$
$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n) + V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n) +$$
$$V(\underline{a}_2, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n) + V(\underline{a}_2, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n) =$$
$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n) + V(\underline{a}_2, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n).$$

Most megmutatjuk, hogy legfeljebb egy megfelelő függvény van: Írjuk fel a természetes bázisban az $\underline{a}_i$-ket:

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n) =$$
$$V(a_{11}\underline{e}_1 + a_{12}\underline{e}_2 + \cdots + a_{1n}\underline{e}_n,$$
$$a_{21}\underline{e}_1 + a_{22}\underline{e}_2 + \cdots + a_{2n}\underline{e}_n, \ldots$$
$$a_{n1}\underline{e}_1 + a_{n2}\underline{e}_2 + \cdots + a_{nn}\underline{e}_n),$$

ami (b) alapján

$$\sum_{(m_1, m_2, \ldots, m_n), 1 \le m_i \le n} a_{1m_1} a_{2m_2} \ldots a_{nm_n} V(\underline{e}_{m_1}, \underline{e}_{m_2}, \ldots, \underline{e}_{m_n}).$$

Az itt szereplő $V(\underline{e}_{m_1}, \underline{e}_{m_2}, \ldots, \underline{e}_{m_n})$ viszont már egyértelműen meghatározott, mivel ha van két megegyező vektor itt, akkor az értéke 0, míg ha nincs, akkor sorcserékkel egységmátrixra hozható, ami szintén már előírja, hogy mi lehet csak. ■.

3.2. Magtér, képtér

17. definíció. A $T : V \to W$ lineáris transztformáció magtere az összes olyan V-beli, vektor, amelynek a képe a $\underline{0}$:

$$Ker(T) = \{\underline{v} : \quad \underline{v} \in V, \quad T(\underline{v}) = \underline{0}\}.$$

A $T : V \to W$ lineáris transztformáció képtere az összes olyan W-beli, vektor, amely előáll képként:

$$Im(T) = \{\underline{w} : \quad \underline{w} \in W, \quad \text{létezik } v \in V, \text{ hogy } T(\underline{v}) = \underline{w}\}.$$

Példa: Legyen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amelyik az x, y síkra vetít. Ekkor a magtér a z tengely, azaz

$$Ker(T) = \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

a képtér pedig maga az x, y sík:

$$Im(T) = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Megmutatható az alábbi tétel:

17. tétel. Tetszőleges $T : V \to W$ lineáris transzformáció esetén

$$\dim V = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)).$$

3.3. Lineáris leképezések mátrixa

A lineáris leképezés definíciójából látszik, hogy tetszőleges $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m \in V$ vektorok és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ valós számok esetén:

$$T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_m \underline{v}_m) =$$
$$T(\alpha_1 \underline{v}_1) + T(\alpha_2 \underline{v}_2) + \cdots + T(\alpha_m \underline{v}_m) =$$
$$\alpha_1 T(\underline{v}_1) + \alpha_2 T(\underline{v}_2) + \cdots + \alpha_m T(\underline{v}_m)$$

A továbbiakban csak $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációval foglalkozunk.
Legyen

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$T(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i T(\underline{e}_i).$$

Tekintsük a következő $n \times n$-es mátrixot:

$$\underline{\underline{T}} = (T(\underline{e}_1), T(\underline{e}_2), \ldots, T(\underline{e}_n)).$$

Ekkor

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}\underline{v}.$$

A $\underline{\underline{T}}$ mátrixot a T lineáris transzformáció természetes bázisban vett transzformációmátrixának hívjuk.
Példák:

(a) $\mathbb{R}^2$-ben 60˙-kal forgatás az origó körül. Ekkor

$$T(\underline{e}_1) = \frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^2$-ben tükrözés az x tengelyre. Mivel

$$T(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 = 1\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + (-1)\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathbb{R}^2$-ben tükrözés az y tengelyre. Mivel

$$T(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 = (-1)\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = \underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $\mathbb{R}^2$-ben tükrözés az origóra. Mivel

$$T(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 = (-1)\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + (-1)\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leellenőrizhető, hogy egy vektorra előbb T_1, majd T_2 transzformációt alkalmazva éppen T_3 transzformációból származó vektort kapjuk. Ez a mátrixokra nézve a következőt jelenti: $\underline{\underline{T}}_2\underline{\underline{T}}_1 = \underline{\underline{T}}_3$. Ez általában is igaz:
A definíció alapján könnyen látszik, hogy ha $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációk, akkor $T_2(T_1(\underline{v}))$ is lineáris transzformáció (T_3) és teljesül rájuk, hogy

$$\underline{\underline{T}}_2\underline{\underline{T}}_1 = \underline{\underline{T}}_3.$$

A traszformációt nem csak a természetes bázisban vizsgálhatjuk. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ egy bázisa $\mathbb{R}^n$-nek és $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformáció. Ekkor T lineáris transzformáció B bázisban vett transzformációmátrixa:

$$\underline{\underline{T}}_B = \left((T(\underline{b}_1))_B \,, (T(\underline{b}_2))_B \,, \dots, (T(\underline{b}_n))_B \right).$$

Ekkor

$$(T(\underline{v}))_B = \underline{\underline{T}}_B(\underline{v})_b$$

Hogyan kaphatjuk meg B_1 és B_2 bázisok esetén $\underline{\underline{T}}_{B_1}$-ből $\underline{\underline{T}}_{B_2}$-t? Tudjuk, hogy

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{\underline{T}}_{B_1}(\underline{v})_{B_1},$$

$$(T(\underline{v}))_{B_2} = \underline{\underline{T}}_{B_2}(\underline{v})_{B_2}.$$

Jelölje $\underline{\underline{P}}$ a bázisátmenet mátrixot. Ekkor

$$(\underline{v})_{B_2} = \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{v})_{B_1},$$

azaz

$$(\underline{v})_{B_1} = \underline{\underline{P}}(\underline{v})_{B_2}$$

és

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{\underline{P}}(T(\underline{v}))_{B_2}.$$

Innen

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{\underline{T}}_{B_1}(\underline{v})_{B_1} = \underline{\underline{T}}_{B_1}\underline{\underline{P}}(\underline{v})_{B_2},$$

másrészt

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{\underline{P}}(T(\underline{v}))_{B_2} = \underline{\underline{P}\underline{\underline{T}}_{B_2}}(\underline{v})_{B_2}$$

ezért

$$\underline{\underline{T}}_{B_1}\underline{\underline{P}}(\underline{v})_{B_2} = \underline{\underline{P}\underline{\underline{T}}_{B_2}}(\underline{v})_{B_2},$$

ami minden $(\underline{v})_{B_2}$ esetén teljesül, ezért

$$\underline{\underline{T}}_{B_1}\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}\underline{\underline{T}}_{B_2}},$$

ahonnan

$$\underline{\underline{T}}_{B_2} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{T}}_{B_1}\underline{\underline{P}}.$$

3.4. Diagonalizálás

18. definíció. Ha $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ $n \times n$-es mátrixok éa létezik $\underline{\underline{P}}$ invertálható $n \times n$-es mátrix, hogy

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}},$$

akkor $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixokat hasonlónak mondjuk.

A cél, hogy adott $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix esetén adjunk meg olyan $\underline{\underline{P}}$ $n \times n$-es invertálható mátrixot, hogy $\underline{\underline{P^{-1}AP}}$, szép legyen!
Mit értsünk "szép" mátrix alatt?

19. definíció. A $\underline{\underline{D}}$ $n \times n$-es mátrix diagonális, ha a főátlón kívül minden elem 0, azaz

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ha

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{\underline{DE}} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix},$$

emiatt

$$\underline{\underline{D}}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

20. definíció. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ mátrix diagonalizálható, ha létezik $\underline{\underline{P}}$ invertálható $n \times n$-es mátrix, amelyre egy diagonális $\underline{\underline{D}}$ mátrixra

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}.$$

Próbáljunk adott $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz megfelelő $\underline{\underline{P}}$ mátrixot találni! A definíció alapján

$$\underline{\underline{PD}} = \underline{\underline{AP}}.$$

A $\underline{\underline{P}}$ oszlopvektorai legyenek:

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

Ekkor

$$\underline{\underline{PD}} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

másrészt

$$\underline{\underline{AP}} = (\underline{\underline{A}}\underline{p}_1 | \underline{\underline{A}}\underline{p}_2 | \dots | \underline{\underline{A}}\underline{p}_n),$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}\underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

21. definíció. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix sajátértéke a λvalós szám, ha létezik $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor, hogy

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \lambda \underline{x}.$$

Ekkor $\underline{x}$-et sajátvektornak mondjuk.

Hogyan keressük meg a sajátértékeket, sajátvektorokat?
Nyilván

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\underline{x} = \lambda \underline{\underline{I}}_n \underline{x} \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{A}}\underline{x} - \lambda \underline{\underline{I}}_n \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}_n)\underline{x} = \underline{0}.$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer. Ennek pontosan akkor van nemtriviális ($\underline{x} \neq \underline{0}$) megoldása, ha

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}_n) = 0.$$

22. definíció. A

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

polinomot karakterisztikus polinomnak hívjuk.

Példák:

(a)
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

sajátértékei, sajátvektorai ($y = x$ egyenesre vetítés mátrixa a természetes bázisban)

(b) 45˙-kal való forgatás mátrixa a természetes bázisban:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(c)
$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokkal már leírható, hogy egy $n \times n$-es mátrix mikor diagonalizálható:

18. tétel. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n db független sajátvektora.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix diagonalizálható, azaz létezik egy invertálható $n \times n$-es $\underline{\underline{P}}$ mátrix, amelyre

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}},$$

ahol

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{PD}} = \underline{\underline{AP}}.$$

A $\underline{\underline{P}}$ oszlopvektorai legyenek:

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

Ekkor oszlopvektorok szerinti felírásban

$$\underline{\underline{PD}} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

másrészt

$$\underline{\underline{AP}} = (\underline{\underline{A}}\underline{p}_1 | \underline{\underline{A}}\underline{p}_2 | \dots | \underline{\underline{A}}\underline{p}_n),$$

azaz $\underline{p}_i$-ik sajátvektorok ($\underline{p}_i \neq \underline{0}$, mert $\underline{\underline{P}}$ invetálható) és $\underline{p}_i$-k lineárisan függetlenek szintén az invertálhatóság miatt.
Most tegyük fel, hogy $\underline{\underline{A}}$-nak létezik n db lineárisan független sajátvektora. Legyenek ezek:

$$\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n,$$

és

$$\underline{\underline{A}}\underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

Legyen $\underline{\underline{P}}$ az a mátrix, amelynek oszlopvektorai $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n$:

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

és legyen

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{AP}} = (\underline{\underline{A}}\underline{p}_1 | \underline{\underline{A}}\underline{p}_2 | \dots | \underline{\underline{A}}\underline{p}_n).$$

és

$$\underline{\underline{PD}} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

így

$$\underline{\underline{AP}} = \underline{\underline{PD}}.$$

Mivel a $\underline{p}_i$-k lineárisan függetlenek, emiatt $\underline{\underline{P}}$ invertálható, ezért

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}. \quad \blacksquare$$

A fenti tétel szerint a diagonalizálás során az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrixhoz keresünk n db lineárisan független sajátvektort:

$$\underline{\underline{A}}\underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

és

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

mátrixokkal

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}.$$

Példa: Diagonalizáljuk az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

mátrixot!
Megoldás:...

Mire használhatjuk a diagonalizálást? Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix diagonalizálható, akkor könnyen számolható az $\underline{\underline{A}}$ hatványai:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{PDP^{-1}}},$$

ezért

$$\underline{\underline{A^m}} = (\underline{\underline{PDP^{-1}}})(\underline{\underline{PDP^{-1}}}) \dots (\underline{\underline{PDP^{-1}}}) =$$

$$\underline{\underline{PD}}(\underline{\underline{P^{-1}P}})\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{P^{-1}P}})\underline{\underline{D}} \dots (\underline{\underline{P^{-1}PDP^{-1}}} =$$

$$\underline{\underline{PD^mP^{-1}}},$$

de ebben a szorzatban már mindent ismerünk.
A következő itt nem bizonyított tétel egy elégséges feltételt ad arra, hogy mikor diagonalozálható egy mátrix:

19. tétel. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix diagonalizálható, ha $\underline{\underline{A}}$-nak n db különböző sajátértéke van.

4. Kvadratikus alakok

A sajátérékek alkalmazásaként végül olyan kérdéseket vizsgálunk meg, hogy az

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = 1$$

vagy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 1$$

milyen görbéket ill. felületeket ír le.
Először nézzük meg, hogyan kapcsolódik ez a lineáris algebrához!
Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + (a_{12} + a_{21})xy.$$

Ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$

$$(a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz.$$

Általában, ha

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n \times n}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$(a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + \dots$$

$$\dots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1})x_{n-1}x_n$$

A középiskolában tanultuk, hogy az

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

egyenlet vagy ellipszist vagy hperbolát ír le. A célunk az, hgy egy

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x}$$

ún. kvadratikus alakban az x_i-ket úgy transzformáljuk:

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n,$$

amelyre

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{y}^T \underline{\underline{D}}\underline{y}$$

teljesül valamely $\underline{\underline{D}}$ diagonális mátrixxal. Legyen

$$\underline{x} = \underline{\underline{P}}\underline{y}.$$

Ekkor

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x} = (\underline{\underline{P}}\underline{y})^T \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{P}}\underline{y}) = \underline{y}^T \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}}\underline{y},$$

ezért

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}},$$

másrészt a diagonalizálás azt adja, hogy

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}},$$

ezért

$$\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1},$$

azaz $\underline{\underline{P}}$ ortogonális mátrix

23. definíció. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix ortogonálisan diagnalizálható, ha létezik egy $\underline{\underline{P}}$ $n \times n$-es ortogonális mátrix, amelyre

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}},$$

valamely diagonális $\underline{\underline{D}}$ mátrix esetén. Bebizonyítható:

20. tétel. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, akkor és csak akkor, ha $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus mátrix.

Mivel minden kvadratikus alak felírható

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$+2a_{12}x_{12} + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

alakban, emiatt minden kvadratikus alakhoz található $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus mátrix, amelyre a kvadratikus alak

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x}$$

alakú, ezért minden kvadratikus alak diagonalizálható.
Hogyan diagonalizálható egy

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x} = 1$$

egyenlet?

(a) A kvadratikus alakot írjuk

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x}$$

alakba, ahol $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus mátrix

(b) Határozzuk meg azt a

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \ldots, | \underline{p}_n)$$

mátrixot, amely ortogonálisan diagonalizálja $\underline{\underline{A}}$-t. Ekkor

$$\underline{\underline{A}}\underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

(c) Ekkor a $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \ldots, \underline{p}_n$ által meghatározott új koordinátarendszerben a keresett egyenelet:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Példa:

(a) Határozza meg az

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

megoldását!

(b) Határozza meg az

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 1$$

megoldását!