1. LINEÁRIS ALGEBRA

1. Lineáris egyenletrendszer

1.1. Bevezetés és definíciók

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 28 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 5y & + & 10z & = & 42 \end{array}$$

Cseréljük fel először az első és a második sort:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 28 \\ 2x & + & 5y & + & 10z & = & 42 \end{array}$$

Ahhoz, hogy a második és a harmadik egyenletből kiküszöböljük az x-et, ezért a második és harmadik egyenletből vonjuk ki az első egyenlet dupláját:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & 2y & + & 4z & = & 16 \\ & & 3y & + & 8z & = & 30 \end{array}$$

Osszuk el a második egyenletet kettővel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & + & 2z & = & 8 \\ & & 3y & + & 8z & = & 30 \end{array}$$

Ahhoz, hogy a harmadik egyenletből kiküszöböljük az y-t, vonjuk ki a harmadik egyenletből a második egyenlet háromszorosát:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & & 2z & = & 6 \end{array}$$

Végezetül osszuk el a harmadik egyenletet kettővel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Innen alulról felfelé olvasva kapjuk, hogy

$$z = 3, \quad y = 2 \text{ és } x = 1.$$

Vegyük észre, hogy menet közben mindíg leírtuk a változókat, pedig valójában csak az ő együtthatóikkal manipuláltunk, emiatt az egész számolást rövidítve egy 3×4-es táblázatot használva is elvégezhettük volna. Ehhez tekintsük a következő táblázatot:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 6 & 28 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 10 & 42 \end{array}\right)$$

Cseréljük fel először az első és a második sort:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 28 \\ 2 & 5 & 10 & 42 \end{array}\right)$$

Ahhoz, hogy a második és a harmadik sorból kiküszöböljük az x-et, ezért a második és harmadik sorból vonjuk ki az első sor dupláját:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{array}\right)$$

Osszuk el a második sort kettővel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{array}\right)$$

Ahhoz, hogy a harmadik sorból kiküszöböljük az y-t, vonjuk ki a harmadik egyenletből a második sor háromszorosát:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Végezetül osszuk el a harmadik egyenletet sort:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ez alapján felírva az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

aminek ismerjük a megoldását:

$$z = 3, \quad y = 2 \text{ és } x = 1.$$

A cél, hogy adott a_{ij} és b_i valós számok esetén megoldjuk az m egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

azaz meg kell határoznunk az összes olyan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-et, amely kielégíti az egyenletrendszert.

Ehhez ekvivalens átalakításokat végezhetünk, ezért a megengedett műveletek:

1. két sor felcserélése;
2. egy egyenlet $c \neq 0$ számmal való szorzása;
3. egy egyenlet c-szeresének hozzáadása egy másik egyenlethez.

Ahhoz, hogy mindezt egyszerűen elvégezhessük, a táblázatot használjuk.

1. definíció. A fenti egyenletrendszerből formált együtthatómátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A konstansok oszlopvektora:

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

és általában mátrixnak nevezünk egy olyan táblázatot, amely téglalap alakú és számokat tartlamaz.

Az alábbi definícióra épül a megoldási módszerünk:

2. definíció. Egy mátrix redukált lépcsős alakú, ha

1. Bármely sorban az első nemnulla tag 1.
2. Bármely két egymást követő nem csupa 0-kat tartlamazó sorban az első 1-es a fentiben van előbb.
3. A csupa nullákat tartalmazó sorok a mátrix utolsó soraiban vannak.

1.2. Gauss-kiküszöbölés

A cél az, hogy a kibővített mátrixot redukált lépcsős alakra hozzuk a következő sorműveletek segítségével:

1. két sor felcserélése;
2. egy egyenlet $c \neq 0$ számmal való szorzása;
3. egy egyenlet c-szeresének hozzáadása egy másik egyenlethez.

A fenti feladatot oldja meg az ún. Gauss-kiküszöbölés vagy más néven Gauss-elimináció. Ez a következő algoritmust jelent:

1. Ha az első oszlopban csak 0-k vannak, akkor takarjuk le őket és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában szintén csak 0-k vannak, akkor ezt is takarjuk le és ezt addig folytassuk, amíg nem találunk olyan oszlopot, amelyben van nemnula elem. Ha ilyen oszlop nincs, akkor az algoritmusnak vége, a mátrix redukált lépcsős alakú.
2. Ha az első nem letakart oszlop első eleme nulla, akkor cseréljük ki ezt a sort egy olyan sorral, amelynek első eleme nemnulla. Így olyan mátrixot kapunk (csak a le nem takart részről vna szó), ahol $a_{11} \neq 0$.
3. Osszuk el az első sort a_{11}-gyel.
4. Vegyük az i-edik sort ($i > 1$). Ha $a_{i1} \neq 0$, akkor vonjuk ki az 1. sor a_{i1}-szeresét az i-edik sorból. Így a bal felső 1-es alatti számok 0-k lesznek.
5. Takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha nem maradt a mátrixban több sor, akkor vége az algoritmusnak, a korábban letakart sorokat és oszlopokat felfedve megkapjuk a redukált lépcsős alakot. Egyébként menjünk vissza 1-re és folytassuk az algoritmust.

A nem csak 0-kat tartalmazó sorokban az első 1-est vezető egyesnek mondjuk.

Példa:

1. Oldja meg a Gauss-kiküszöböléssel az

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 2z & = & 8 \\ x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & & & 4z & = & 6 \\ x & + & 2y & + & 6z & = & 22 \end{array}$$

Megoldás: A kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 6 & 22 \end{array}\right)$$

Cseréljük fel az első és a második sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 6 & 22 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki az első sort a negyedik sorból:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \end{array}\right)$$

Osszuk el a második sort kettővel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a második sort a negyedik sorból:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Osszuk el a harmadik sort 4-gyel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a negyedik sorból a harmadik sor háromszorosát:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

és megkaptuk a redukált lépcsős alakot. Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

Innen már kapjuk :

$$z = 3, y = 1, \text{ és } z = 2.$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & & = 0 \\ 2x_1 & +6x_2 & -5x_3 & +4x_4 & -3x_5 & = -1 \\ & & 5x_3 & + & 15x_5 & = 5 \\ 2x_1 & +6x_2 & + & 4x_4 & +18x_5 & = 6 \end{array}$$

Megoldás: Az kibővített mátrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 4 & 18 & 6 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki az első sor kétszeresét a második és a negyedik sorból:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 18 & 6 \end{array}\right)$$

Szorozzuk be a második sort (-1)-gyel:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 18 & 6 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki az első sor ötszörösét a harmadik és az első sor négyszeresét a negyedik sorból:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Cseréljük föl a harmadik és negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Osszuk el a harmadik sort 3-mal:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ez a következő egyenletrendszert jelenti:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & & & 3x_5 & = & 1 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 1/3 \end{array}$$

Innen

$$x_5 = 1/3 \text{ és } x_3 = 0$$

x_4 és x_2 szabadon választható:

$$x_4 = s \text{ és } x_2 = t,$$

tetszőleges valós s és t esetén; ahonnan

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3t - 2s.$$

Ha a egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát hozzuk redukált lépcsős alakra, akkor innen a megoldásokat a következőképpen olvassuk ki:

1. Nincs megoldás ha az utolsó nemnulla sorban a legutolsó tag 1, a többi 0. $(0x_1 + 0x_2 \cdots + 0x_n = 1)$
2. Egyértelmű a megoldás, ha az utolsó oszlopot kivéve minden oszlopban vezető egyes.
3. Végtelen sok megoldás van, ha van olyan nem utolsó oszlop, amelyben nincs vezető egyes (és nincs olyan sor, amelyben az utolsó elem 1, a többi 0). Ekkor azon oszlopoknak megfelelő ismeretlenek, amelyekben nincs vezető egyes szabad paraméternek választható, a többi ismeretlen pedig már ezen szabad paraméterek segítségével egyértelműen kifejezhető.

Megemlítjük a Gauss-kiküszöbölés egy továbbfejlesztett változatát az ún. Gauss-Jordan-eliminációt, ahol a vezető egyesekkel nem csak az alatta lévő számokat hanem a fölötte levőket is lenullázzuk.

Megjegyzés:

1. Ha a Gauss-Jordan-eliminációt egy n ismeretlent tartalmazó és n egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre alkalmazzuk, ahol a megoldás egyértelmű, akkor a kibővített mátrix végül olyan $n \times (n+1)$ alakú mátrix lesz, ahol az utolsó oszlopában c_i-k vannak, mig az előtte lévő n oszlopban átlósan helyezkednek el az 1-esek, egyébként minden máshol 0-k vannak:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c_3 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{array}\right).$$

   Ekkor $x_i = c_i$.

2. Ha a Gauss-Jordan eliminációt olyan n ismeretlent tartalmazó és n egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre alkalmazzuk, ahol végtelen sok megoldás lesz, akkor akkor a kibővített mátrix végül olyan $n \times (n+1)$ alakú mátrix lesz, ahol az utolsó sorban csupa 0-k vannak.

1.3. Homogén lineáris egyenletrendszer

Egy lineáris egyenletrendszert homogénnak mondunk, ha a jobb oldalon lévő konstansok 0-k:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}$$

Ennek az egyenletnek biztos van megoldása:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0,$$

amit triviális megoldásnak mondunk. Így a megoldás vagy egyértelmű, vagy végtelen sok van belőle.

Megjegyzés:

1. Ha $m < n$, akkor a redukált lépcsős alakban a vezető egyesek száma legfeljebb m, de n oszlopunk van, emiatt az $m < n$ feltétel miatt lesz olyan oszlop, amelyik nem tartlamaz vezető egyest, így ekkor biztos, hogy végtelen sok megoldás van.
2. Ha $m = n$, akkor csak a triviális megoldás van, ha a redukált lépcsős alak olyan, hogy a vezető egyesek a bal felső sarokból indulva 45˙-os szögben helyezkednek el (tehát a legutolsó oszlopot kivéve minden oszlopban van vezető egyes).
3. Ha $m = n$, akkor akkor lesz végtelen sok megoldás, ha redukált lépcsős alakban az utolsó sor csak 0-kat tartalmaz.

2. Mátrixalgebra

Ebben a fejezetben a mátrixokkal végezhető műveleteket tekintjük át.

3. definíció. Az $\underline{\underline{A}}$ táblázatot egy $m \times n$-es mátrixnak mondjuk, ha alakja

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Jelölés: $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m \times n}$.

A mátrixok közötti műveleteket az összeadással, kivonással és számmal való szorzással kezdjük. Az összeadás és kivonás csak azonos alakú számok között végezhető el, komponensenként kell elvégezni a műveletet.

4. definíció. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m \times n}$ és $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{m \times n}$. Ekkor $\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$.

A számmal való szorzás is komponensenként történik:

5. definíció. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m \times n}$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor $c\underline{\underline{A}} = (ca_{ij})_{m \times n}$.

Példa: Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Határozza meg a $2\underline{\underline{A}} + 3\underline{\underline{B}}$ mátrixot!

Megoldás:

$$2\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & 6 \\ 10 & -2 & 6 & 14 \\ -2 & 8 & -10 & 12 \end{pmatrix}$$

és

$$3\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -6 & 21 & 9 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 6 \\ -9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

ezért

$$2\underline{\underline{A}} + 3\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -4 & 29 & 13 & 3 \\ 10 & -14 & 6 & 20 \\ -11 & 17 & -7 & 15 \end{pmatrix}.$$

6. definíció. Jelölje $\underline{\underline{0}} = (0)_{m\times n}$ az ún. nullmátrixot.

Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m\times n}$ és $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{m\times n}$. Az összeadás, kivonás és számmal szorzás műveleteknek az alábbi - a valós számok tulajdonságai alapján nyilvánvaló - tulajdonságaik vannak:

1. $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ is $m \times n$-es mátrix.
2. $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$ (kommutativitás)
3. $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})$ (asszociativitás)
4. $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$
5. Minden $\underline{\underline{A}}$ esetén létezik $-\underline{\underline{A}}$, amelyre: $\underline{\underline{A}} + (-\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}$.
6. Minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $c\underline{\underline{A}}$ is $m \times n$-es mátrix.
7. $1\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$.
8. $(a + b)\underline{\underline{A}} = a\underline{\underline{A}} + b\underline{\underline{A}}$
9. $a(b\underline{\underline{A}}) = (ab)\underline{\underline{A}}$
10. $a(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = a\underline{\underline{A}} + a\underline{\underline{B}}$.

A következő művelet a transzponálás, amely a sorokból oszlopokat készít:

7. definíció. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m\times n}$. Ekkor az mátrix az az $m \times n$-es mátrix, amelynek i-edik sorának j-edik eleme: a_{ji}. Jelölés: $\underline{\underline{A^T}}$

Példa: Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ekkor

$$\underline{\underline{A^T}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A transzponálásnak az alábbi tulajdonságai vannak, ha az alábbi műveletek értelmesek:

1. $(\underline{\underline{A^T}})^T = \underline{\underline{A}}$
2. $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{A^T}} + \underline{\underline{B^T}}$;
3. $(c\underline{\underline{A}})^T = c\underline{\underline{A^T}}$;
4. $(\underline{\underline{AB}})^T = \underline{\underline{B^T A^T}}$.

A mátrixok szorzása már egy bonyolultabb művelet:

8. definíció. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m\times n}$ és $\underline{\underline{B}} = (a_{ij})_{n\times k}$. Ekkor $\underline{\underline{AB}} = (c_{ij})_{m\times k}$, ahol

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Tehát csak olyan mátrixokat tudunk összeszorozni, ahol a baloldali mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora van a jobboldali mátrixnak. Célszerű úgy képezni a szorzatot, hogy a balodali mátrixot írjuk baloldalt és átlósan fölfelé, jobbra írjuk a jobboldali mátrixot, hogy az elsőtől jobbra és másodiktól lefelé könnyű legyen meghatározni a szorzat komponenseit.

Példa: Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{AB}} = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 30 & 22 \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{\underline{BA}} = \begin{pmatrix} 26 & 27 & 9 \\ 14 & 15 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

ezért

$$\underline{\underline{AB}} \neq \underline{\underline{BA}}.$$

9. definíció. Jelölje $\underline{\underline{I_n}}$ azt az $n \times n$-es mátrixot, amely a főátlóban 1-eseket, máshol pedig 0-kat tartalmaz. Ez az ún. egységmátrix.

A mátrixszorzás tulajdonságai:

1. A kommutativitás általában nem teljesül
2. $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{BC}}) = (\underline{\underline{AB}})\underline{\underline{C}}$ (associativitás)
3. Minden $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m\times n}$ esetén $\underline{\underline{AI_n}} = \underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{I_m A}} = \underline{\underline{A}}$.

A mátrixszorzás segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszert is tömören fel lehet írni:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

A fenti egyenletrendszerből formált együtthatómátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

A változók oszlopvektora:

$$\underline{x} = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \right)$$

A konstansok oszlopvektora:

$$\underline{b} = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right)$$

Ha elvégezzük az $\underline{\underline{A}}\underline{x}$ beszorzást, akkor éppen a fenti lineáris egyenletrendszer jobboldalából alkotott együtthatómátrixot kapjuk. Mivel két mátrixot akkor mondunk egyenlőnek, ha ugyanolyan alakú és komponensenként megegyeznek, ezért az egyenletrendszer

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$$

alakba írható.

Mivel az $\underline{x}$ oszlopvektor az ismeretlenek tartalmazó vektor, emiatt ebből az $\underline{x}$-et kell meghatároznunk. Ehhez "osztanunk" kell $\underline{\underline{A}}$-val.

10. definíció. Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrixot invertálhatónak mondjuk, ha létezik $\underline{\underline{X}} = (x_{ij})_{n\times n}$ mátrix, amelyre

$$\underline{\underline{XA}} = \underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{I}}_n.$$

Jelölés: $\underline{\underline{A}}^{-1}$

Megjegyzések:

1. Legfeljebb egy inverz létezhet, mert ha $\underline{\underline{X}}_1$ és $\underline{\underline{X}}_2$ inverzei $\underline{\underline{A}}$-nak, akkor

$$\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{I}}_n\underline{\underline{X}}_1 = (\underline{\underline{X}}_2\underline{\underline{A}})\underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{X}}_2(\underline{\underline{AX}}_1) = \underline{\underline{X}}_2.$$

2. Megmutatható, hogy elég csak az $\underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{I}}_n$ és $\underline{\underline{XA}} = \underline{\underline{I}}_n$ feltételek közül az egyiket kikötni, ez már maga után vonja a másik teljesülését.

3. Nem négyzetes mátrixnak nem értelmezzük az inverzét.

Példák:

1. Határozza meg az

$$\underline{\underline{A}} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right)$$

mátrix inverzét, ha az létezik.
Megoldás: Legyen

$$\underline{\underline{X}} = \left(\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array} \right).$$

Ekkor

$$\underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{I}}_n$$

azt jelenti, hogy

$$\left(\begin{array}{cc} x_{11} + 3x_{12} & 2x_{11} + 4x_{12} \\ x_{21} + 3x_{22} & 2x_{21} + 4x_{22} \end{array} \right).$$

A komponensenk a bal és a jobboldalon megegyeznek, emiatt egy egyenletrendszert kapunk, aminek a megoldása:

$$x_{11} = -2, \quad x_{12} = 1, \quad x_{21} = \frac{3}{2}, \quad x_{22} = -\frac{1}{2},$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{X}} = \left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

2. Határozza meg az

$$\underline{\underline{A}} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right)$$

mátrix inverzét, ha az létezik.
Megoldás: Legyen

$$\underline{\underline{X}} = \left(\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array} \right).$$

Ekkor

$$\underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{I}}_n$$

azt jelenti, hogy

$$\left(\begin{array}{cc} x_{11} + 2x_{12} & 2x_{11} + 4x_{12} \\ x_{21} + 2x_{22} & 2x_{21} + 4x_{22} \end{array} \right).$$

A komponensenk a bal és a jobboldalon megegyeznek. Innen egy egyenletrendszert kapunk, aminek nincs megoldása, emiatt nem létezik az inverz.

Az alábbiakban azt gondoljuk meg, hogyan lehet kiszámítani hatékonyan mátrix inverzét, ha létezik.

Jelölje az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix inverzét $\underline{\underline{A}}^{-1}$. Ekkor ha az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix oszlopait $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$-nel és az $\underline{\underline{I}}_n$ mátrix oszlopait $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$-nel jelöljük, akkor a mátrixszorzás definíciója szerint

$$\underline{\underline{A}}\underline{x}_1 = \underline{b}_1, \underline{\underline{A}}\underline{x}_2 = \underline{b}_2, \ldots, \underline{\underline{A}}\underline{x}_n = \underline{b}_n.$$

teljesül. Az

$$\underline{\underline{A}}\underline{x}_i = \underline{b}_i$$

egyenletrendszer megoldásánál a kibővített mátrixot vesszük:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}} & \underline{b}_i \end{array}\right)$$

vesszük és ezt a Gauss-Jordan-kiküszöböléssel a következő alakra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{I}}_n & \underline{x}_i \end{array}\right).$$

Mivel minden $1 \le i \le n$ esetén ugyanazt a mátrixot akarjuk kapni a bal oldalon, ezért az n lineáris egyenletrendszer egyszerre is megoldható, csak a jobboldalra először egymás mellé kell írnunk a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorokat. Így éppen az $\underline{\underline{I}}_n$ írjuk le. Tehát az inverz mátrix meghatározása során kiindulunk az

$$\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{I}}_n \end{array}\right).$$

kibővített mátrixból és a Gauss-Jordan-eliminációval ebből kihozzuk a

$$\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{I}}_n & \underline{\underline{A}}^{-1} \end{array}\right)$$

alakot. Ha ez sikerül, akkor megkaptuk az inverzt, ha nem, akkor nem létezik az inverz.

Példa: Határozza meg az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 13 & 18 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

mátrix inverzét!
Megoldás: A

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 13 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

mátrixmásodik sorából vonjuk kiaz 1. sor 5-szörösét és a harmadik sorból vonjuk ki az első sor 3-szorosát:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Osszuk le a második sort (-2)-vel:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vonjuk ki az első sorból a második sor háromszorosát és adjuk hozzá a negyedik sorhoz a második sor 4-szeresét:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Végezetül vonjuk ki az első és a második sorból a harmadik sort:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

tehát

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Megmutatható, hogy $n \times n$-es $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ mátrixoknál, feltéve, hogy értelmezett műveletek vannak:

1. $(\underline{\underline{A^{-1}}})^{-1} = \underline{\underline{A}}$
2. $(c\underline{\underline{A}})^{-1} = \frac{1}{c}\underline{\underline{A^{-1}}}$
3. $(\underline{\underline{A^T}})^{-1} = (\underline{\underline{A^{-1}}})^T$
4. $(\underline{\underline{AB}})^{-1} = \underline{\underline{B^{-1}A^{-1}}}$.

Az

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$$

alakú lineáris egyenletrendszer invertálható $n \times n$-es $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén

$$\underline{x} = \underline{\underline{A^{-1}}}\underline{b}$$

alakú.

Példa: Határozza az

$$\begin{array}{rrl} 2x & +3y & = -1 \\ -x & +5y & = -6 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert az inverzmátrix felhasználásával!
Megoldás: Ekkor

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Az inverz mátrix kiszámolása az alábbiak szerint történik:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Osszuk el az első sort 2-vel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Adjuk hozzá a második sorhoz az elsőt:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right),$$

Szorozzuk be második sort $\frac{2}{13}$-dal:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{array}\right),$$

Vonjuk ki az első sorból a második sor $\frac{3}{2}$-szeresét:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{array}\right),$$

tehát

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

Igy

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

azaz

$$x_1 = 1 \text{ és } x_2 = -1.$$