1. Determinánsok

1. Bevezetés és definíció

Oldjuk meg az alábbi kétismeretlenes, két egyenletet tartalmaz lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Szorozzuk meg az első egyenletet a_{22}-vel és a másodikat a_{12}-vel:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x_1 &+ a_{12}a_{22}x_2 &= b_1a_{22} \\ a_{21}a_{12}x_1 &+ a_{22}a_{12}x_2 &= b_2a_{12}, \end{aligned}$$

majd vonjuk ki az első egyenletetből a másodikat:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

azaz

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Hasonlóan:

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Ha az alábbi három ismeretlenes egyenletrendszert tekintjük:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 &+ a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 &+ a_{23} &= b_2 \\ a_{31}x_1 &+ a_{32}x_2 &+ a_{23}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Ekkor egy hasonló, de lényegesen hosszabb számolás adja:

$$x_1 = \frac{p}{q},$$

ahol

$$p = b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} -$$

$$-b_3a_{13}a_{22} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33}$$

és

$$q = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Hasonló képlet adható x_2, x_3-ra.

Próbáljuk megérteni a nevezőket! A kétismeretlenes egyenletrendszerben a kéttagú összegek:

$$a_{11}a_{22}$$

és

$$a_{12}a_{21}$$

A háromismeretlenes egyenletrendszerben a háromtagú összegek:

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}$$

Látjuk, hogy egy szorzatban az indexek első számai az $1, 2$ ill. $1, 2, 3$, a második számokban pedig az $1, 2$ ill. $1, 2, 3$ számok összes permutációja jelenik meg. Igy természetes azt gondolnunk, hogy az

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots & + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

egyenletrendszer megoldásánál az x_i nevezőjében olyan n tényezős szorzatok jelennek meg, ahol az indexben az első számok: $1, 2, \dots, n$ és a második számokban az $1, 2, \dots, n$ számok összes lehetséges permutációi szerepelnek.
Még meg kell értenünk a szorzatok előjelét. Ehhez az inverziószám fogalmára van szükségünk.

1. definíció. Legyen az $1, 2, \dots, n$ számok egy permutációja $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. Ekkor ebben a permutációban azon párok számát, ahol az előbbre lévő nagyobb mint a hátrébb lévő a permutáció inverziószámának hívjuk. Jelölés: $I(\sigma)$

Például: Két szám eseten:

$$I(1, 2) = 0$$

és

$$I(2, 1) = 1.$$

Három szám esetén:

$$I(1, 2, 3) = 0$$

$$I(2, 3, 1) = 2$$

$$I(3, 1, 2) = 2$$

$$I(3, 2, 1) = 3$$

$$I(1, 3, 2) = 1$$

és

$$I(2, 1, 3) = 1.$$

Látjuk azt, hogy a nevezőken $+$ áll ha

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

esetén $I(\sigma)$ az inverziószám páros szám és $-$ szám, ha az $I(\sigma)$ páratlan, tehát $n = 2$ és 3 esetén az

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

szorzat előjele:

$$(-1)^{I(\sigma)}.$$

Ezek alapján természetes az alábbi definíció:

2. definíció. Egy $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix determinánsa:

$$det\underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \dots, n$ összes permutációjára vonatkozik.

Egy másik jelölés:

$$det\underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Példák:

1. Egy 2×2-es mátrix determinánsát úgy számoljuk ki, hogy a főátlóban lévő elemeket összeszorozzuk és kivonjuk ebből a mellékátlóban lévő elemeket szorzatát:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 26$$

2. Egy 3×3-as determinánst a legegyszerűbb az ún. Sarrus-szabállyal kiszámolni. Ehhez a 3×3-as determinánst leírása után ismételjük meg az első két oszlopot és formáljunk az átlósan elhelyezkedő számokból 3-tagú szorzatokat. Ezeket adjuk össze oly módon, hogy a balról, fentről jobbra lefelé elhelyezkedő számok szorzatait $+$-szal a többieket $-$-szal vesszük tekintetbe.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 -$$

$$-1 \cdot 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot 6 = 106$$

3. Legyen $\underline{\underline{A}}$ egy ún. $n \times n$-es felső háromszögmátrix, azaz olyan mátrix, ahol a főátló alatt 0-k szerepelnek. Ekkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}.$$

Nézzük meg, hogy ez a szumma milyen nem nulla szorzatokat tartalmaz! Az $a_{n\sigma(n)} \neq 0$ csak akkor lehet, ha $\sigma(n) = n$. A $a_{n\sigma(n-1)} \not 0$ csak akkor lehet, ha $\sigma(n-1) = n-1$ vagy n. Mivel $\sigma(n) = n$, ezért $\sigma(n-1) = n-1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\sigma(i) = i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Azaz csak egy összeggel kell számolnunk: az $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$-nel. Mivel az $I(1, 2, \dots, n) = 0$, ezért az előjel $+$ lesz, így

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} & \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Az utolsó példa azért jelentős, mert a Gauss-elimináció során minden $n \times n$-es mátrix ilyen alakra hozható. Így a következőkben azzal foglalkoznunk, hogy megértsük, hogy a Gauss-elimináció során alkalmazott sorműveletek milyen hatással vannak a determinánsra.

Példák: Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$det\underline{\underline{A}} = 10$$

1. Sorcsere:
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10,$$
azaz a determináns a -1-szeresére változott.

2. $c \neq 0$-val való szorzás: Szorozzuk meg a második sort 3-mal:
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 30,$$
azaz a determináns szintén 3-szorosára nőtt

3. Egy sorhoz adjuk hozzá egy másik sor c-szeresét: Adjuk például az első sorhoz a második sor dupláját:
$$\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10,$$
azaz a determináns értéke nem változott.

A fent látott tulajdonságok általában is igazak:

1. tétel. 1. Ha egy $n \times n$-es mátrixban sorcserét hajtunk végre, akkor a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.

2. Ha egy $n \times n$-es mátrixban egy sort beszorzunk egy c számmal, akkor a determináns is c-vel szorzódik.

3. Ha egy $n \times n$-es mátrixban egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor c-szeresét, akkor determináns nem változik.

Példa: Határozza meg az

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

Megoldás: Emeljünk ki 3-at az első sorból:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Adjuk hozzá az első sort a második és negyedik sorhoz és vonjuk ki a harmadik sorból az első sort:

$$3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Cseréjük fel a második és harmadik sort:

$$3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vonjuk ki a harmadik sorból a második sor dupláját:

$$-3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Cseréljük meg a harmadik és negyedik sort:

$$3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Vonjuk ki a negyedik sorból a harmadik sor hatszorosát:

$$3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -21$$

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy a mátrixműveletek a determinánsokkal mit csinálnak. Legyen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$det\underline{\underline{A}} = -2, \qquad \underline{\underline{B}} = -11$$

Nyilván

$$det\underline{\underline{A}}^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 = det\underline{\underline{A}},$$

$$det(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -50 \neq det\underline{\underline{A}} + det\underline{\underline{B}}$$

$$det(\underline{\underline{AB}}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = 22 = det\underline{\underline{A}}det\underline{\underline{B}},$$

$$det\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{det\underline{\underline{A}}}$$

A fent látott összefüggések általában is igazak:

2. tétel. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ és $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{n\times n}$. Ekkor

1. $det\underline{\underline{A}}^T = det\underline{\underline{A}}$,
2. $det(\underline{\underline{AB}}) = det\underline{\underline{A}}det\underline{\underline{B}}$,
3. ha $\underline{\underline{A}}$ invertálható, akkor $det\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{det\underline{\underline{A}}}$

A determináns fogalmával már teljesen le lehet írni azokat a négyzetes mátrixokat, amelyek invertálhatók:

3. tétel. Egy $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $det\underline{\underline{A}} \neq 0$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ egy invertálható mátrix. Ekkor létezik $\underline{\underline{A}}^{-1}$ $n \times n$-es mátrix, hogy

$$\underline{\underline{AA}}^{-1} = \underline{\underline{I}}_n.$$

Ezért

$$1 = \underline{\underline{I}}_n = det(\underline{\underline{AA}}^{-1}) = det\underline{\underline{A}}det\underline{\underline{A}}^{-1},$$

ezért

$$\det \underline{\underline{A}} \neq 0.$$

Most tegyük fel, hogy $det\underline{\underline{A}} \neq 0$. Alkalmazzuk $det\underline{\underline{A}}$-ra a Gauss-Jordan eliminációt. Ekkor az eredmény vagy az $\underline{\underline{I}}_n$ egységmátrix vagy egy olyan mátrix, amelynek utolsó sorában csupa 0 van. Nézzük meg, hogy a Gauss-Jordan elimináció során alkalmazott lépéseknél a determináns hogyan változik!

Sorcserénél a determináns (-1)-szeresre változik; ha egy sort $c \neq 0$ számmal szorzunk, akkor a determináns is c-vel szorzódik és ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor c-szeresét, akkor nem változik a determináns értéke. Ezért ha olyan $n \times n$-es mátrixból indulunk ki, ahol a determináns nem-nulla, akkor a Gauss-Jordan eliminációval kapott mátrix determinánsa sem nulla. Ezért nem lehet, hogy a fenti $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén a Gauss-Jordan-elimináció olyan mátrixot eredményezzen, ahol az utolsó sorban 0-k vannak, mert akkor a determináns 0 lenne. Így a Gauss-Jordan elimináció az $\underline{\underline{I}}_n$ egységmátrixot szolgáltatja, tehát a korábban megismert algoritmussal meghatározhatjuk $\underline{\underline{A}}^{-1}$-t, tehát létezik az inverz. ■

A következőkben a determins egy másik kiszámítási módját mutatjuk be. Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix determinánsa:

$$det\underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)},$$

ezért látjuk, hogy egy rögzített a_{ij} szám olyan szorzatokban szerepel, ahol a tagok abból a mátrixból jönnek, amit

$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapunk. Jelölje ennek determinánsát M_{ij}. Nézzük meg, hogy hogyan számítható ki ez alapján egy 3×3-as mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) +$$

$$a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Érdemes bevezetni az előjeles aldetermináns fogalmát:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Eszerint

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

Ezt az észrevételt általánosítja a kifejtési tétel:

4. tétel. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$, jelölje C_{ij} az előjeles aldeterminánsokat. Ekkor minden $1 \le i \le n$ esetén

$$\det \underline{\underline{A}} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

és minden $1 \le j \le n$ esetén

$$\det \underline{\underline{A}} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

Az első képletet használatánál azt mondjuk, hogy az i-edik sor szerint fejtjük ki a determinánst, míg a második képletet használva a szóhasználat az, hogy a j-edik oszlop szerint fejtünk ki. Mindig olyan sor vagy oszlop szerint érdemes kifejteni, amelyik a lehető legtöbb 0-t tartalmazza, mert így a lehető legtöbb olyan szorzat lesz, ahol az egyik tényező 0, tehát ezeket le sem kell írni.

Példa: Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!
Megoldás: A második sor szerint érdemes kifejteni. Ekkor a $(-1)^{i+j}$ előjelet legegyszerűbb az ún. sakktáblaszabály szerint felírni, balodalt felül + jel van, egy sorban felváltva vannak + és − jelek, és két egymás utáni sorban eggyel elcsusztatva vannak a + és −-ok. Eszerint

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-3)\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

E két determinánst most megint kifejtjük, mondjuk az első sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -22 \end{vmatrix} =$$

$$6\cdot 0 - 9\cdot 1 + 3\cdot(-2) = -15.$$

és

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$3\cdot(-1) - 6\cdot 0 + 3\cdot 1 = 0,$$

így

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-15) - 2\cdot 0 = -45.$$

A kifejtési tétel egy kis módosításával jutunk a ferde kifejtési tételhez:

5. tétel. Legyen $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$, jelölje C_{ij} az előjeles aldeterminánsokat. Ekkor minden $1 \le i \le n$ és minden $1 \le j \le n$ esetén ha $i \ne j$, akkor

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = 0.$$

A kifejtési és a ferde kifejtési tétel lehetőséget ad arra, hogy invertálható mátrix esetén az inverzet felírjuk. Ehhez szükség van az adjungált mátrix definíciójára:

3. definíció. Az $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix adjungált mátrixát úgy kapjuk, hogy minden komponens helyett vesszük a hozzá tartozó előjeles aldetermináns, majd ezt transzponáljuk (a főállóra tükrözzük). Tömören:

$$\mathrm{adj}\underline{\underline{A}} = (C_{ji})_{n\times n}$$

6. tétel. Ha $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{n\times n}$ egy invertélható mátrix, akkor

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}.$$

Bizonyítás: Az inverz definíciója szerint azt kell megmutatni, hogy

$$\underline{\underline{A}}\left(\frac{1}{\det\underline{\underline{A}}}\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}\right)=\underline{\underline{I}}_n,$$

azaz

$$\underline{\underline{A}}\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}=\det\underline{\underline{A}}\underline{\underline{I}}_n=$$

$$\begin{pmatrix} \det\underline{\underline{A}} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det\underline{\underline{A}} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \det\underline{\underline{A}} & \dots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det\underline{\underline{A}} \end{pmatrix}.$$

Vegyük a $\underline{\underline{A}}\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}$ szorzatot. A szorzat i-edik sorának és j-edik oszlopának eleme

$$a_{i1}C_{j1}+a_{i2}C_{j2}+\dots+a_{in}C_{jn}=\begin{cases}\det\underline{\underline{A}}, & \text{ha} \quad i=j\\ 0, & \text{ha} \quad i\neq j\end{cases}$$

a kifetési és ferde kifejtési tétel szerint. Ez bizonyítja a tételt. ■

Példa: Határozza meg az

$$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

mátrix inverzét!
Megoldás: Könnyen látszik, hogy $M_{11}=3, M_{12}=-2, M_{21}=2, M_{22}=5$, ezért $C_{11}=3, C_{12}=2, C_{21}=-2, C_{22}=5$. Így

$$\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\det\underline{\underline{A}}=19,$$

ezért

$$\underline{\underline{A}}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{19} & \frac{-2}{19}\\ \frac{2}{19} & \frac{5}{19}\end{pmatrix}.$$

Végezetül visszatérünk a kiinduló problémára és szeretnénk egy n ismeretlent tartalmazó n egyenletből álló lineáris egyenletrendszert megoldani, most már determinánsokkal. Legyen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\dots+ & a_{1n}x_n & = & b_1\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\dots+ & a_{2n}x_n & = & b_2\\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & +\dots+ & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

A fenti egyenletrendszerből formált együtthatómátrix:

$$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

A változók oszlopvektora:

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

A konstansok oszlopvektora:

$$\underline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Az egyenlet az ismert módon, tömören

$$\underline{\underline{A}}\underline{x}=\underline{b}$$

alakba írható. Ha $\underline{\underline{A}}$ egy invertálható mátrix, akkor

$$\underline{x}=\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}=\left(\frac{1}{\det\underline{\underline{A}}}\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}\right)\underline{b}.$$

Az

$$\left(\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}\right)\underline{b}$$

szorzat elvégzése a következő adja:

$$\begin{pmatrix} b_1C_{11}+b_2C_{21}+\dots+b_nC_{n1}\\ b_1C_{12}+b_2C_{22}+\dots+b_nC_{n2}\\ \vdots\\ b_1C_{1n}+b_2C_{2n}+\dots+b_nC_{nn}\end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=\frac{1}{\det\underline{\underline{A}}}\begin{pmatrix} b_1C_{11}+b_2C_{21}+\dots+b_nC_{n1}\\ b_1C_{12}+b_2C_{22}+\dots+b_nC_{n2}\\ \vdots\\ b_1C_{1n}+b_2C_{2n}+\dots+b_nC_{nn}\end{pmatrix}.$$

Igy

$$x_j=\frac{b_1C_{1j}+b_2C_{2j}+\dots+b_nC_{nj}}{\det\underline{\underline{A}}}.$$

Végezetül meg kell értenünk a számlálót. Jelölje $\underline{\underline{A}}_j$ azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixban a j-edik oszlopot kicseréljük a $\underline{b}$ oszlopvektorral. Ekkor C'_{ik}-vel jelölve az $\underline{\underline{A}}_j$ aldeterminánsait kapjuk a j-edik oszlop szerint $\underline{\underline{A}}_j$-t kifejtve, hogy

$$\det\underline{\underline{A}}_j=b_1C'_{1j}+b_2C'_{2j}+\dots+b_nC'_{nj}.$$

Mivel az $\underline{\underline{A}}_j$ és $\underline{\underline{A}}$ csak a j-edik oszlopban külömbözik, ezért a j-edik oszlophoz tartozó előjeles aldeterminánsok a két mátrixban megegyeznek, azaz

$$C'_{ij}=C_{ij},$$

ezért
$$\det \underline{\underline{A}}_j = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj},$$
így
$$x_j = \frac{\det \underline{\underline{A}}_j}{\det \underline{\underline{A}}}.$$
A fent levezetett formulát Cramer-szabálynak hívják.

Példa: Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & 2z & = & 6 \\ -3x & + & 4y & + & 6z & = & 30 \\ -x & - & 2y & + & 3z & = & 8 \end{array}$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!
Megoldás: Az együtthatómátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

ennek determinánsa:

$$\det \underline{\underline{A}} = 44.$$

A Cramer-szabályban szereplő mátrixok:

$$\underline{\underline{A_1}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{A_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{A_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

és az ő determinánsaik:

$$\det \underline{\underline{A}}_1 = -40$$
$$\det \underline{\underline{A}}_2 = 72$$
$$\det \underline{\underline{A}}_3 = 152,$$

így
$$x_1 = \frac{-40}{44}, \quad x_1 = \frac{72}{44}, \quad x_1 = \frac{152}{44}.$$