Nevezetes függvények, inverzfüggvények

Jelölés: $\forall$ azt jelenti, hogy “minden”, $\exists$ azt jelenti, hogy “létezik”, $\exists!$ azt jelenti, hogy “létezik egyetlenegy”.

Ha az f függvény értelmezési tartománya $\mathcal{D}(f)$ és értékkészlete $\mathcal{R}(f)$, akkor

$$\forall x \in \mathcal{D}(f)\ \exists! y \in \mathcal{R}(f) : y = f(x) \qquad \forall y \in \mathcal{R}(f)\ \exists x \in \mathcal{D}(f) : y = f(x)$$

Szóban: minden értelmezési tartománybeli x-hez egyetlenegy olyan y van, hogy $f(x) = y$. Minden értékkészletbeli y-hoz van olyan x, hogy $f(x) = y$. Lehet, hogy több olyan x is van, amire $f(x) = y$

Azt mondjuk, hogy az f függvény *injektív* (avagy *invertálható*), ha

$$\forall y \in \mathcal{R}(f)\ \exists! x \in \mathcal{D}(f) : f(x) = y$$

Szóban: az f függvény akkor invertálható, ha minden értékkészletbeli y-hoz egyetlenegy olyan x van, amire $f(x) = y$. Akkor invertálható az f, ha a grafikonjának minden lehetséges vízszíntes vonallal legfeljebb egy közös pontja van.

Ha f invertálható függvény, akkor f inverzfüggvénye az az f^{-1}-el jelölt függvény, amire $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$, $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$, és $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

Feladat: Határozza meg a következő függvények inverzfüggvényét! Az értelmezési tartomány mindegyik esetben a pozitív valós számok halmaza, azaz $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$:

$f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = x^\alpha$

Feladat: Határozza meg az $f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$ függvény lehető legbővebb értelmezési tartományát (a nullával való osztást ki kell zárni) és ehhez az értelmezési tartományhoz tartozó értékkészletet. Rajzolja fel f grafikonját, és lássa be, hogy f invertálható. Határozza meg $f^{-1}(x)$-et és rajzolja fel a grafikonját.

Annak az eldöntéséhez, hogy egy függvény invertálható-e vagy sem, nem elég az $f(x)$-et megadó képletet megnézni, $\mathcal{D}(f)$ is fontos:

Feladat: Invertálható-e az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény, ha $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$? Melyik az a legnagyobb $a \in \mathbb{R}$, amire igaz, hogy ha $\mathcal{D}(f) = (-\infty, a]$, akkor f invertálható? Határozza meg az inverzfüggvényt, ha ilyen alakú az értelmezési tartomány!

Transzformációk: A $2f(x)$ függvény grafikonja az $f(x)$ függvény grafikonjából kétszeres függőleges nyújtással kapható, $f(x)+2$ grafikonját úgy kapjuk, hogy az $f(x)$ grafikonját felfelé toljuk 2-vel, az $f(2x)$ grafikonját úgy kapjuk, hogy az $f(x)$ grafikonját vízszíntes irányban a felére zsugorítjuk, az $f(x+2)$ grafikonját úgy kapjuk, hogy az $f(x)$ grafikonját balra toljuk 2-vel. Az f^{-1} grafikonját úgy kapjuk az f grafikonjából, hogy az $x = y$ egyenesre tükrözzük.

Exponenciális függvény: $f(x) = e^x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. $e \approx 2,71$. Szigorú monoton növő: $x < y \implies e^x < e^y$. Ha az f függvény grafikonját függőlegesen kétszeresére nyújtjuk, ugyanazt látjuk, mint ha balra eltoltuk volna ln(2)-vel: $2e^x = e^{\ln(2)}e^x = e^{\ln(2)+x}$. Áttérés természetes alapú exponenciális függvényre:

$$a^x = e^{\ln(a)\cdot x}$$

Természetes alapú logaritmus: $f(x) = \ln(x)$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$, szigorú monoton növő. Ez az e^x függvény inverzfüggvénye, tehát minden pozitív x-re $e^{\ln(x)} = x$ es minden $x \in \mathbb{R}$-re $\ln(e^x) = x$.

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x) \qquad \ln(1/x) = -\ln(x) \qquad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Ha a $\ln(x)$ függvény grafikonját vízszintesen összehúzom a felére, akkor ugyanazt látom, mintha felfelé toltam volna ln(2)-vel: $\ln(2x) = \ln(x) + \ln(2)$.

Feladat: Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{2}\ln(-3x-1) - 5$ függvény értelmezési tartományát és inverzfüggvényét.

Szinusz hiperbolikusz: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathcal{D}(\sinh) = \mathbb{R}$, monoton növő, páratlan függvény:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{-e^x + e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

Koszinusz hiperbolikusz: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathcal{D}(\cosh) = \mathbb{R}$, páros függvény: $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x \qquad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

A képletgyűjtémenyen lévő sinh és cosh-képletek közül az elsőnek a bizonyítása:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Feladat: Az összes többi képlet bizonyítása.

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \qquad \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$$

További összefüggéseket lásd a wikipedia-n: Google: “wikipedia hyperbolic function”

Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények):

Arkusz szinusz: $\arcsin(x)$, $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1,1]$, $\mathcal{R}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, monoton növő függvény. A grafikonja úgy kapható, hogy a szinuszfüggvény grafikonjának a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé eső részét tükrözzük az $y = x$ egyenesre.

Arkusz koszinusz: arccos, $\mathcal{D}(\arccos) = [-1,1]$, $\mathcal{R}(\arccos) = [0,\pi]$, monoton csökkenő függvény. A grafikonja úgy kapható, hogy a koszinuszfüggvény grafikonjának a 0 és π közé eső részét tükrözzük az $y = x$ egyenesre.

Arkusz tangens: arctan, $\mathcal{D}(\arctan) = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}(\arctan) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, monoton növő függvény. A grafikonja úgy kapható, hogy a tangensfüggvény grafikonjának a szigorúan $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé eső részét tükrözzük az $y = x$ egyenesre.

Feladat: Rajzoljuk fel az arkuszfüggvényeket. Milyen a,b,c,d-re teljesül, hogy

$$\forall x \ \arcsin(x) = c \cdot \arccos(a \cdot x + b) + d$$

Segítség: a rajz sokat segít...