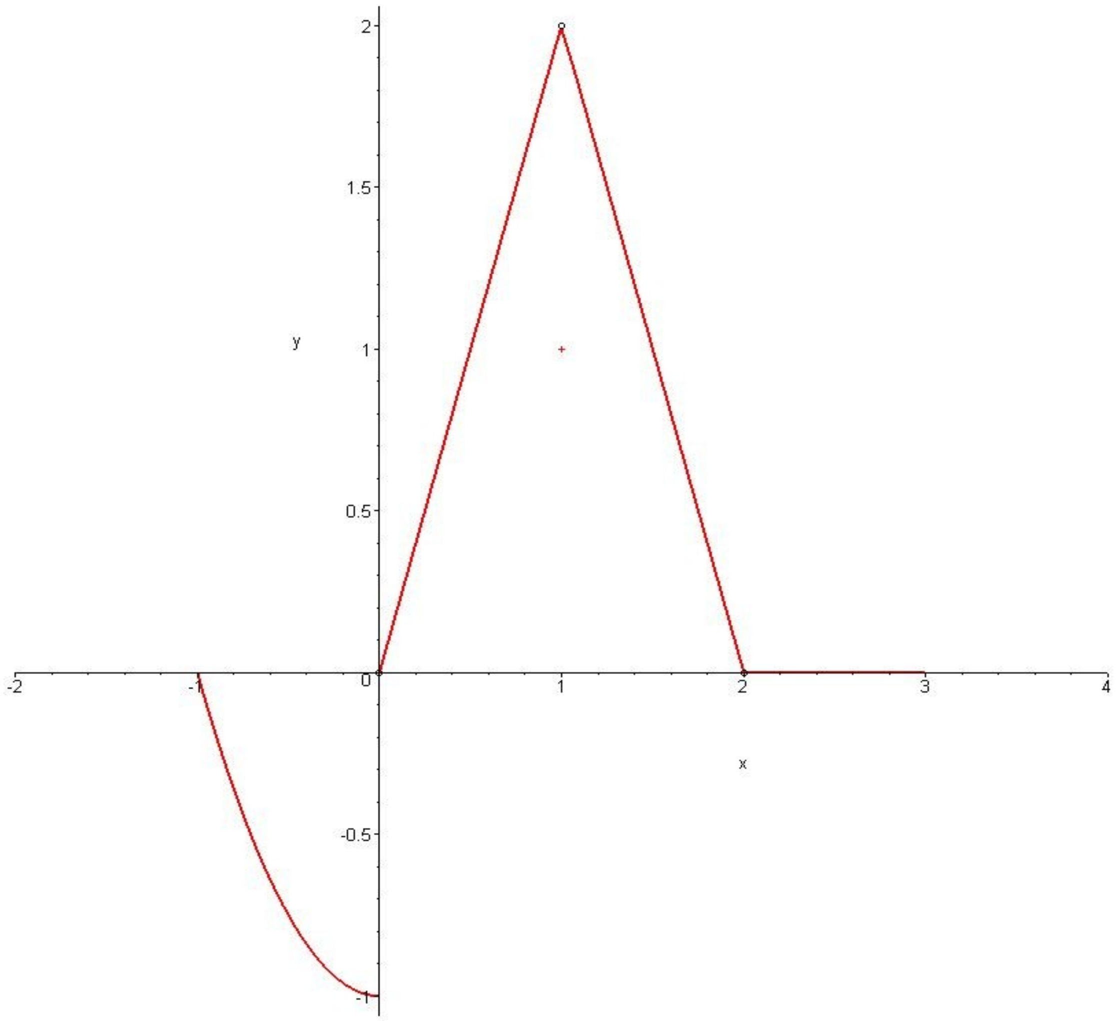
Matematika A1

Folytonosság

Megoldások

1.



$D_f = x \in \mathbb{R} \mid \{-1 \le x < 3\} \setminus \{0,2\}$

Az **x = -1** pontban csak jobb oldali határértéket értelmezhetünk, amely megegyezik a helyettesítési értékkel, így a függvény e pontban jobbról folytonos.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$$

Az **x = 0** -ban a függvény nincs értelmezve. A határértéket csak külön jobbról, illetve balról tudjuk értelmezni.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Elsőfajú szakadás van ebben a pontban, amely nem szűntethető meg, mert a jobb- ill. baloldali határértékek különbözőek.

Az **x = 1**-ben $f(1)=1$, ez nem egyezik meg a határértékkel. Balról és jobbról közelítve ugyanazt az eredményt kapjuk, így értelmezhetjük a függvény határértékét.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

A határérték nem egyezik meg a helyettesítési értékkel, ez ismét elsőfajú szakadás; de megszűntethtő, ha az x = 1 helyen a

$$f(1):=\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

határértékkel definiáljuk a helyettesítési értéket.

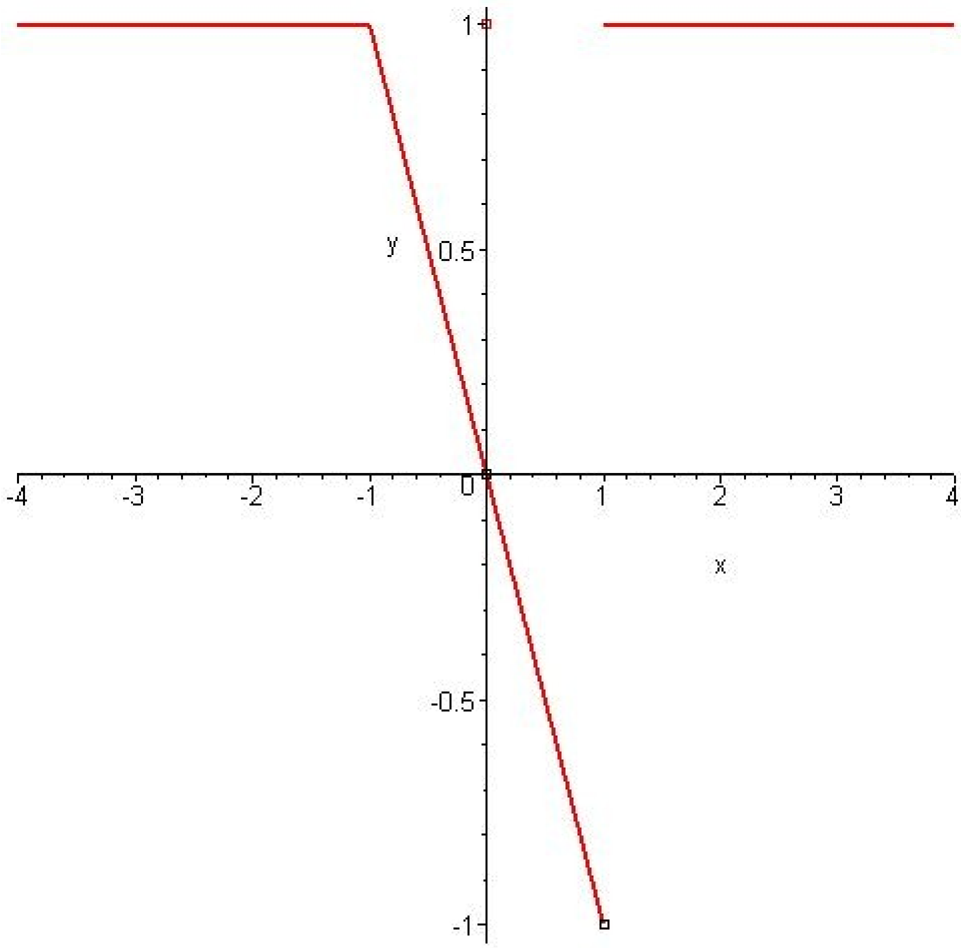
x = 2-ben a függvény nincs értelmezve, a szakadási hely megszűntethető mert, a két oldalról vett határérték egyforma.

$$f(2):=\lim_{x\to 2} f(x)=0$$

x = 3-ban csak baloldali határértéket tudunk megadni, a pont szakadási hely, amely nem szűntethető meg (a nem értelmezhető további határértékek miatt).

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=0$$

2.



$D_f = x \in \mathbb{R}$

x = -1-ben a függvény határértéke a helyettesítési érték, tehát folytonos is (mindkét oldalról ugyanúgy).

$$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=1$$

x = 0 : Elsőfajú, megszűntethető szakadás $f(0)=1 \quad f(0):=\lim_{x\to 0} f(x)=0$

x =1-ben külön értelmezhető a bal- és jobboldali határérték.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1 \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=1$$

A jobb oldali határérték egyben a helyettesítési érték, a függvénynek itt ugráshelye van.

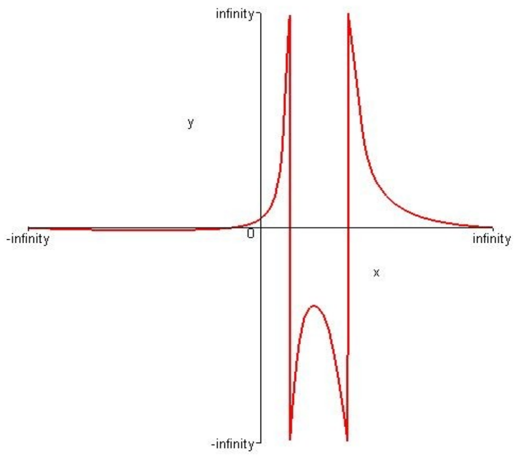
x = 2; x = 3: Létezik a határérték, amely érték alapján a pontokban a függvény folytonos.

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=1 \quad ; \quad f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)=1$$

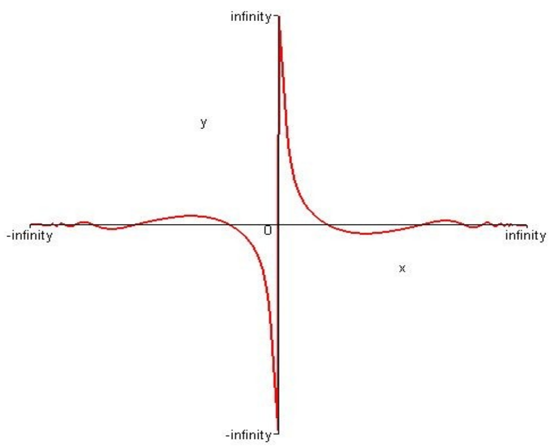
3.

a. $D_f=x\in\mathbb{R} \setminus\{2\}$. A függvény az értelmezési tartományban végig folytonos; az x = 2 szakadási hely szinguláris pont, mert ott a bal- ill. jobboldali határértékek rendre mínusz- ill. plusz-végtelennel egyenlőek.

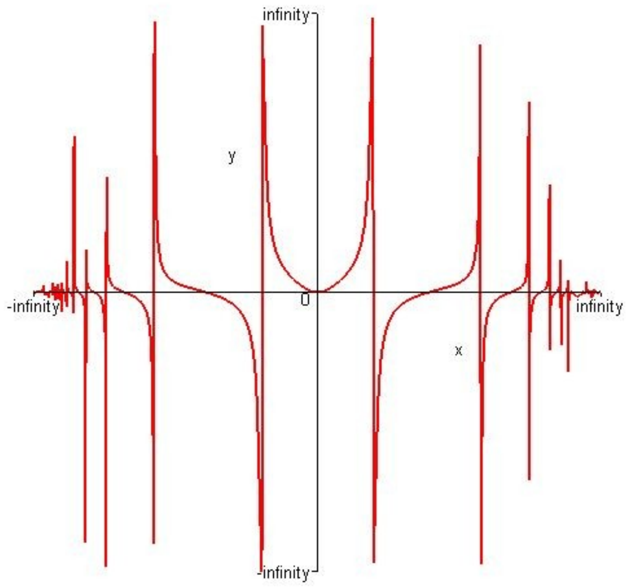
b. $D_f=x\in\mathbb{R} \setminus\{1,3\}$. A függvény az értelmezési tartományban végig folytonos; x=1 és x=3 szinguláris pontok.



c. $D_f=x\in\mathbb{R} \setminus\{0\}$. A függvény az értelmezési tartományban végig folytonos; x=0 szinguláris pont.



d. $x=k\cdot\frac{\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$ -ben szingulárisok, egyébként folytonos.



e. $x\in\mathbb{R}|x\geq-1.5$ x>1.5 -re folytonos, x=1.5 -ben jobbról folytonos.

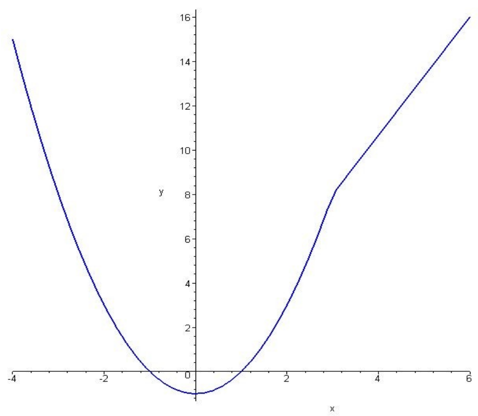
4.

Az adott pontokban a határérték létezik, és véges.

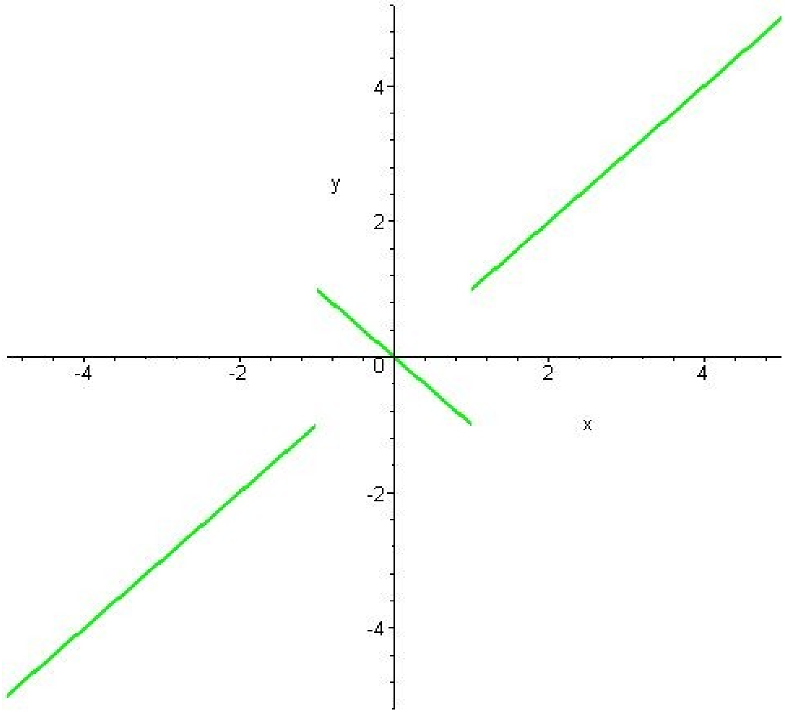
a. $\lim_{x\to-1} f(x)=-2 \qquad f(x):=\begin{cases}\lim_{x\to-1} f(x) & x=-1\\ \frac{x^2-1}{x+1} & \text{egyébként}\end{cases}$

b. $\lim_{x\to3} g(x)=2 \qquad g(x):=\begin{cases}\lim_{x\to3} g(x) & x=3\\ \frac{x^2-2\mathrm{x}-3}{2\mathrm{x}-6} & \text{egyébként}\end{cases}$

5. $a=\frac{4}{3}$



6.



$D_f = x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

Mindkét szakadási hely esetében elsőfajú, nem megszűntethető szakadás áll fenn, mert a bal- ill. jobboldali határértékek nem egyeznek meg.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

Nem lehet a függvényt kiterjeszteni.

7.

a., 4 **b.,** 10 **c.,** 1/4 **d.,** 3/5 **e.,** 2/7 **f.,** -1 **g.,** ln(2) **h.,** 4ln(2) **i.,** 2/3 **j.,** 1/3

8.

Mind a racionális, mind az irracionális számok végtelen sűrűn helyezkednek el a valós számok halmazában. Használjuk fel ezt, illetve a folytonosság definícióját.

Ha u egy racionális szám, f(u) = 1. Ha a racionális számokban folytonos a függvény, $\forall\ \varepsilon > 0 -$hoz $\exists\ \delta > 0$, hogy ha $|x-u| < \delta$, akkor $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. A végtelen sűrű elhelyezkedés miatt a δ tartományon belül kell hogy találjunk irracionális számot is, amelyre $|f(x) - f(u)| = 1$, mert $f(x) = 0$. Ez esetben pedig $|f(x) - f(u)| \geq \varepsilon$, ha $\varepsilon < 1$, vagyis nem telsjesül a feltétel bármely ε -ra; tehát a függvény a racionális pontokban nem folytonos.

Teljesen azonos gondolatmenettel bebizonyíthatjuk, hogy szakadási hely van minden irracionális számnál is.

A Dirichlet – függvény tehát sehol sem folytonos. Ennek következménye: két racionális szám között mindig kell lennie egy irracionálisnak, és fordítva.

9.

a. $2\mathrm{x}+4-\frac{1}{x^2}$

b. $-\frac{2}{x^3}-\frac{24}{x^7}-\frac{21}{x^8}-\sin(x)$

c. $e^x+\frac{1}{x}+10^x\cdot\ln(10)+\frac{1}{x\cdot\ln(2)}$