Thomas: Kalkulusban nem szereplő elméleti kérdések

2008 ősz

Bernoulli egyenlőtlenség: Minden $h > -1$ valós és pozitív n esetén $(1+h)^n \geq 1 + nh$.

Bizonyítás: n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.
Ha $n = 1$, akkor a bizonyítandó állítás: $(1+h)^1 \geq 1 + 1h$, ami nyilvánvaló.
Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz az állítás, azaz $(1+h)^k \geq 1 + kh$ és be akarjuk bizonyítani, hogy $(1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h$. Mivel $h > -1$, ezért

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) = 1 + kh + h + kh^2 = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h,$$

amit bizonyítani akartunk. ■

Binomiális tétel: Tetszőleges a és b valós és n pozitív egész esetén

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Bizonyítás: Emlékeztetünk arra, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható jelentése $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, továbbá

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!((k+1)+(n-k))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Ezt használva a binomiális tételt n szerinti indukcióval bizonyítjuk be.
n=1 esetén az állítás:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 b^0 + \binom{1}{1}a^0 b^1,$$

ami nyilvánvalóan igaz, mivel $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.
Az indukciós lépésben tegyük fel, hogy $n = m$-re igaz az állítás, azaz

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m b^0 + \binom{m}{1}a^{m-1}b^1 + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots + \binom{m}{m-1}a^1 b^{m-1} + \binom{m}{m}a^0 b^m$$

és meg akarjuk mutatni, hogy

$$(a+b)^{m+1} = \binom{m+1}{0}a^{m+1}b^0 + \binom{m+1}{1}a^m b^1 + \binom{m}{2}a^{m-1}b^2 + \cdots + \binom{m+1}{m}a^1 b^m + \binom{m+1}{m+1}a^0 b^{m+1}.$$

Nyilván

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m(a+b) = (a+b)\left(\binom{m}{0}a^m b^0 + \cdots + \binom{m}{k}a^{m-k}b^k + \binom{m}{k+1}a^{m-k-1}b^{k+1} + \cdots + \binom{m}{m}a^0 b^m\right).$$

Beszorzás után azt kapjuk, hogy az a^{m+1} és b^{m+1} együtthatója 1 és az a^{n+1-k} $(1 \leq k \leq m)$együtthatója

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1},$$

ami bizonyítandó volt. ■

Az $a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens

Elég megmutatni, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton növő és felülről korlátos.
A monoton növekedést a Bernoulli egyenlőtlenség segítségével bizonyítjuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \left(1+\frac{-1}{n^2+2n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \geq \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ felülről korlátos. A binomiális tétel alapján

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n} \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} <$$

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3,$$

ami bizonyítandó volt. ■

Nevezetes határértékek

Definíció szerint $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ebből következik, hogy

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Logaritmust véve kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \log_a \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

Mivel az $x \to \infty$ esetén az x vétele megegyezik azzal, hogy $x \to 0$ esetén vesszük az $\frac{1}{x}$-et, ezért a fenti egyenlőség úgy is írható, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \frac{1}{\ln a}$$

Legyen $x = a^y - 1$. Ekkor az $x \to 0$ feltétel ekvivalens az $y \to 0$ feltétellel. Ezért

$$\frac{1}{\ln a} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{a^y - 1} \log_a(a^y - 1 + 1) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{a^y - 1} \log_a a^y = \lim_{y\to 0} \frac{y}{a^y - 1},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Legyen $\mu \in \mathbb{R}$. Ekkor az $y = (1+x)^\mu - 1$ jelölés esetén az $x \to 0$ feltétel ekvivalens az $y \to 0$ feltétellel. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} \frac{\ln(y+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(y+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln((1+x)^\mu - 1 + 1)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mu \ln(1+x)}{x} = \mu.$$

Az $f(x) = e^x$ és $f(x) = \ln x$ deriváltja

Legyen $f(x) = e^x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \frac{1}{\ln e} = e^{x_0}.$$

Most legyen $f(x) = \ln x$. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{\frac{h}{x_0}} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

Taylor-tétel: Tegyük fel, hogy $f(x)$ az a és b között $(n+1)$-szer differenciálható és $f^{(n)}(x)$ a zárt számközben folytonos. Ekkor létezik egy c az a és b között, amelyre

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Legyen az $f(x)$ függvény $x = a$ helyen vett n-edrendű Taylor-polinomja:

$$T_{f,n}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ekkor

$$f(b) = T_{f,n}(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ennek egyszerű következménye:

$$|f(b) - T_{f,n}(b)| \leq \max_x \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \right|,$$

ahol a maximumot az a és b közötti x-ek esetén vesszük.

n-edrendű érintkezés, görbület, simulókör. Az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények az $x = x_0$ pontban n-edrendben érintkeznek ha

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) \\ f'(x_0) &= g'(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= g^{(n)}(x_0), \end{aligned}$$

de

$$f^{(n+1)}(x_0) = g^{(n+1)}(x_0).$$

Jelölje $\Delta\alpha$ az $f(x)$ függvény x_0 és $x_0 + \Delta x$ helyeken vett érinői által bezárt szöget; továbbá jelölje az x_0 és $x_0 + \Delta x$ értékek közötti görbe ívhosszát δs. Ekkor az $f(x)$ függvény x_0-ban vett görbületén a következő határértéket értjük:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Megmutatható, hogy

$$G(x_0) = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0)))^{3/2}}$$

Adott $f(x)$ függvény és $x = x_0$ pont esetén azt a kört, amelyik az $f(x)$ görbét az $(x_0, f(x_0))$ pontban másodrendben érinti az $f(x)$ függvény $x = x_0$ helyhez tartozó simulókörének hívjuk. Megmutatható, hogy a simulókör sugara $1/G(x_0)$