Matematika A1
8. feladatsor

Megoldások

1.

a., $\frac{dy}{dx}=-\frac{y(2x+y)}{x(x+2y)}$

b., $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y(x+1)^2}$

c., $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+tg^2 y}$

d., $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y(x+1)^2}$

e., $\frac{dy}{dx}=\frac{-2y+\sin(x)+3x^2}{1+2x}$

f., $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{-\sin(y)+x}$

2.

a., $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$; $\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}$

b., $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y}$; $\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{(x+1)^2-y^2}{y^3}$

c., $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$; $\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{1}{2\left(1+3\sqrt{y}+3y+\sqrt{y^3}\right)}$

3.

a.,

-illeszkedik
-az érintő egyenlete: $7x-4y=2$
-a normális egyenlete: $4x+7y=29$

b.,

-illeszkedik
-az érintő egyenlete: $6x-7y=-6$
-a normális egyenlete: $7x+6y=-7$

c.,

-illeszkedik

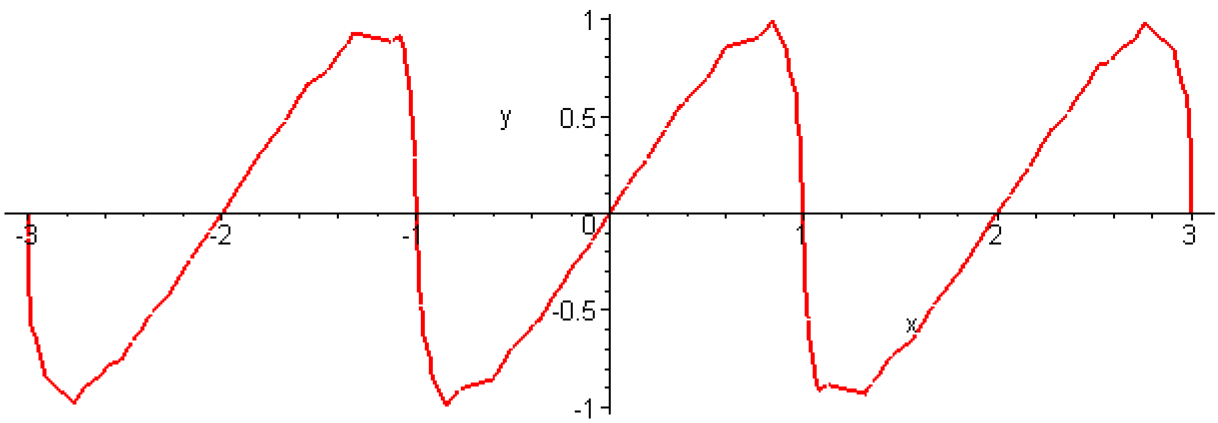
A függvény deriváltja: $y'=\dfrac{\cos(\pi x-y)\pi}{1+\cos(\pi x-y)}$

A pont koordinátáit közvetlenül nem helyettesíthetjük be, mert nem értelmezhető (zérus nevezőjű) kifejezést kapunk; vegyünk határátmenetet:

$$\lim_{x=1,\, y=0} y'=-\infty \quad .$$

Az érintő egyenese csökkenőből függőlegesbe tart ebben a pontban, **egyenlete**: $x=1$.
A normális egyenlete: $y=0$ **.**

A függvény képe:



4.

$$\frac{d\,V(x)}{d\,x}=0 \quad \rightarrow \quad x_1=\frac{20}{3} \quad ; \quad x_2=2$$

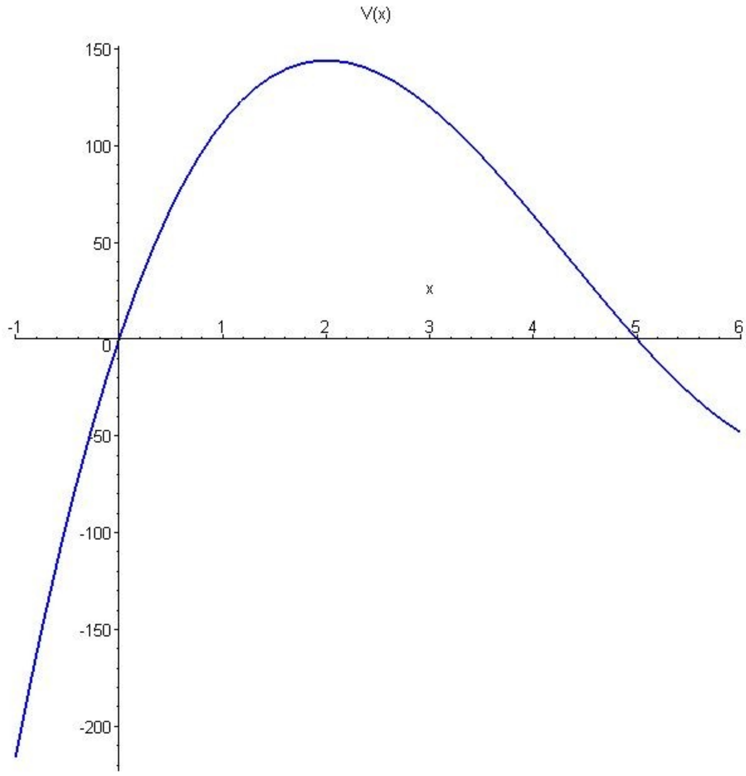
A megadott intervallumon az x_2 **helyen** van a függvénynek **szélsőértéke**.

$$\left(\frac{d^2 V(x)}{d\,x^2}\right)_{x=x_2}=-56$$

A szélsőértékhely **maximumhely**, mert ott a második derivált negatív értéket ad (konkáv szakasz).

A dobozra nézve ez **maximális térfogatot** jelent, amely *V(2)=144* térfogategység.

A térfogatfüggvény képe:



5.

A területfüggvény: $T(x)=\dfrac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$.

$$\frac{d\,T(x)}{d\,x}=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-\frac{5}{\sqrt{2}} \;\; ; \;\; x_2=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$\left(\dfrac{d^2T(x)}{d\,x^2}\right)_{x=x_1}=2$; x_1 - ben tehát minimumhely van.

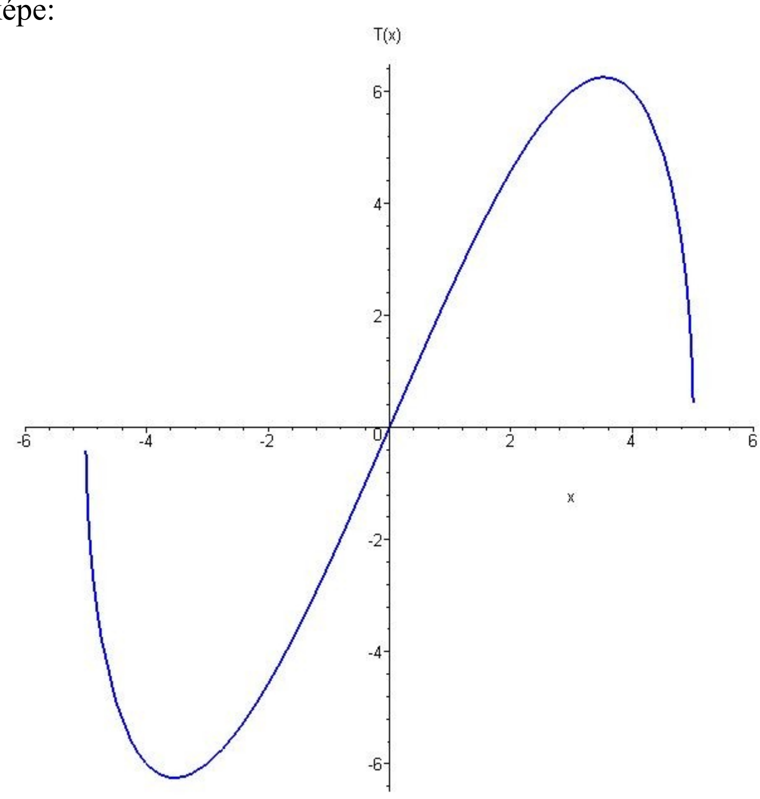
Ebből nem származik értelmezhető megoldás, mivel x valójában a háromszög oldalhossza; a minimális terület a legkisebb pozitív oldalhosszra adódik (x_1 pedig negatív szám).

$\left(\dfrac{d^2T(x)}{d\,x^2}\right)_{x=x_2}=-2$; x_2 - ben maximumhelyet találtunk!

Innen az 5 cm átfogójú derékszögű háromszög **maximális területe:** $T\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{\dfrac{25}{4}}$ **területegység**.

A két befogó hossza $5\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; tehát az átfogóhoz tartozó szögek: 30° és 60°.

A területfüggvény képe:



6.

Először $t = \frac{\pi}{4}$ sec elteltével a csúcsérték $\boldsymbol{i = \sqrt{2^3}}$ **A** .

7.

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_{t=t_0} = \frac{4}{9} \;\; ; \;\; x(t_0) = 4 \;\; ; \;\; y(t_0) = 8$$

Az érintő: $y = \frac{4}{9}x + \frac{56}{9}$ **, vagy paraméteresen** $x = t - 14 \; , \; y = \frac{4}{9}t$ $\left(x = t \; , \; y = \frac{4}{9}t + \frac{4}{9} \cdot 14 \right)$ **.**

8.

Keressük azt a paramétert, amelyre $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1$ (egységnyi pozitív meredekség). Innen $\boldsymbol{t_0 = -3}$.

9.

$$y = -\frac{4}{5}x + 4 \cdot \sqrt{2}$$