Felületek

Felület megadása: Legyen T az (u,v) koordinátákkal leírt sík egy tartománya. Rendeljünk e tartomány minden (u,v) pontjához egy 3D vektort:

$$\underline{r}(u,v) = x(u,v)\underline{i} + y(u,v)\underline{j} + z(u,v)\underline{k}$$

Az így definiált $\boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ függvénybizonyos regularitási feltételek mellett felületet határoz meg. Mi a továbbiakban feltesszük, hogy mindhárom koordináta második parciális deriváltjai is folytonosak.

Rögzített v érték mellett u változtatásával egy felületi görbét kapunk. Hasonlóan, rögzített u érték mellett v változtatásával egy másik felületi görbét kapunk. A felületet elképzelhetjük úgy, mint ezen görbék hálózatából alkotott felület.

Az $\underline{r}(u,v) = x(u,v)\underline{i} + y(u,v)\underline{j} + z(u,v)\underline{k}$ függvény valamely pontbeli határértéke, folytonossága, parciális deriváltjai a szokásos módon értelmezhető és koordinátánként kiszámolható.

Felületi normális

Egy (u_0,v_0) pontban az $\underline{r}(u,v_0) = x(u,v_0)\underline{i} + y(u,v_0)\underline{j} + z(u,v_0)\underline{k}$ görbe deriváltja $\underline{r}_u(u_0,v_0) = x'_u(u_0,v_0)\underline{i} + y'_u(u_0,v_0)\underline{j} + z'_u(u_0,v_0)\underline{k}$ a felületi görbe egy érintő vektora. Hasonlóan $\underline{r}_v(u_0,v_0) = x'_v(u_0,v_0)\underline{i} + y'_v(u_0,v_0)\underline{j} + z'_v(u_0,v_0)\underline{k}$ egy másik érintő vektor. E két vektor meghatározza az érintő síkot. Ezek vektoriális szorzata a felületi normális:

$$\underline{n} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$$

Megjegyzés: Ha az $\underline{r}(u,v)$ függvény valóban felületet határoz meg, akkor $\left|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\right| \neq 0$.

Definíció: Az $E = \underline{r}_u^2 \quad F = \underline{r}_u \underline{r}_v \quad G = \underline{r}_v^2$ mennyiségeket Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeknek nevezzük.

Mivel $\left(\underline{r}_u \times \underline{r}_v\right)^2 = \underline{r}_u^2 \cdot \underline{r}_v^2 - \left(\underline{r}_u \cdot \underline{r}_v\right)^2$, ezért $\left|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\right| = \sqrt{EG - F^2} \neq 0$.

Felületi görbe ívhossza

Az $\underline{r}(u,v)$ felületen egy tetszőleges görbe az $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$ egyenletek megadásával definiálható és ekkor a görbe egyenlete: $\underline{r}(u(t),v(t))$. A görbe ívhossza, mivel $\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$ a láncszabály miatt, a következő képletből számítható:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\dot{\underline{r}}\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt$$

Felületdarab felszíne

Az (u,v) sík valamely T tartományához tartozó felületdarab felszínét a következő integrál adja:

$$A = \iint_T \sqrt{EG - F^2}\, du dv$$

Gauss-féle másodrendű főmennyiségek

A másodrendű deriváltakból és az egységnyi hosszú felületi normálisból alkotott $L = \underline{r}_{uu}\underline{n} \qquad M = \underline{r}_{uv}\underline{n} \qquad N = \underline{r}_{vv}\underline{n}$ mennyiségeket nevezzük Gauss-féle másodrendű főmennyiségeknek.

Felületi pontok osztályozása

Ha valamely pontban a Gauss-féle másodrendű főmennyiségekből alkotott $LM\text{-}N^2$ kifejezés pozitív, akkor a felületi pont elliptikus, ha $LM\text{-}N^2 = 0$, akkor parabolikus, ha pedig $LM\text{-}N^2 < 0$, akkor hiperbolikus.