Differenciálegyenletek

1. Az egyik végén befogott *L* méter hosszú acélhuzal saját súlyának hatására megnyúlik. Határozzuk meg a huzal megnyúlását, ha az acél fajsúlya γ Mp/m^3.

T húzóerő a befogás alatt x távolságra

$\frac{T}{G} = \frac{L-x}{L}$ dx elem megnyúlása $dl = k\frac{T}{q}dx$

Ebből $dl = \frac{kG}{Lq}(L-x)dx$ és $G = \gamma Lq$

Tehát $l = k\gamma \int_0^L (L-x)dx = \frac{1}{2}k\gamma L^2$

2. Határozzuk meg egy lánchíd kötelének alakját. (súlytalan kötél, egyenletes hídpálya)

Függőleges és vízszintes erők egyensúlya a szimmetria tengelytől x távolságra

$T\sin\varphi = kx$ $T\cos\varphi = H$ Ezekből: $\mathrm{tg}\,\varphi = y' = \frac{k}{H}x$

$y = \frac{k}{2H}x^2 + c$ parabola

3. Bomlási törvény

Radioaktív anyag bomlási sebessége minden időpillanatban arányos a még el nem bomlott anyag tömegével. (Pl. rádium felezési ideje $T \approx 1600$ év. Hány százaléka bomlik el 400 év alatt?)

$\Delta m = -km\Delta t$ $\frac{dm}{dt} = -km$ $m = Ce^{-kt}$ Ha a kezdeti tömeg m_0 akkor $C = m_0$

Továbbá felezési idő $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$ Ebből $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

(Pl. rádium $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{400}{1600}} = \frac{m_0}{2^{\frac{1}{4}}} \approx 0{,}84m_0$. Tehát kb. 16% bomlik el.)

4. Ejtőernyő (fékezőerő sebességgel arányos, vagy sebesség négyzetével)

$\frac{dv}{dt} = g - kv$ (>0)

$\frac{dv}{g-kv} = dt$

$$-\frac{1}{k}\ln(g-kv)=t+c$$

ha $v(0)=0$, akkor $c=-\frac{1}{k}\ln g$

$$t=\frac{1}{k}(\ln g-\ln(g-kv))=\frac{1}{k}\ln\frac{g}{g-kv}$$

$$\frac{g}{g-kv}=e^{kt} \qquad 1-\frac{k}{g}v=e^{-kt}$$

$v=\frac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$ határsebesség: $\frac{g}{k}$

Második eset:

$$\frac{dv}{dt}=g-kv^2 \quad (>0)$$

$$\frac{dv}{g-kv^2}=dt$$

$$\frac{1}{k}\int\frac{dv}{\frac{g}{k}-v^2}=dt$$

$$\int\frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{g}{k}}-v\right)\left(\sqrt{\frac{g}{k}}+v\right)}=kdt$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}+\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}\right)dv=kdt$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}}\ln\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}=kt+c$$

ha $v(0)=0$, akkor $c=0$

$$\ln\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}=2\sqrt{kg}\,t$$

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}=e^{2\sqrt{kg}\,t} \quad \text{innen} \quad v=\frac{1-e^{-2\sqrt{kg}t}}{1+e^{-2\sqrt{kg}t}}\sqrt{\frac{g}{k}} \quad \text{határsebesség:} \quad \sqrt{\frac{g}{k}}$$

5. Talajvíz szintje kút közelében.
A kút körhenger alakú, szintjét szivattyúzással állandó szinten tartják.

Áramlási sebesség $v=k\dfrac{dy}{dx}$ A kútba beáramló vízmennyiség:

$$Q=2\pi xyv=2\pi xyk\frac{dy}{dx} \quad \text{ebből} \quad \frac{dx}{x}=\frac{2\pi k}{Q}ydy \quad \text{azaz} \quad \ln x=\frac{\pi k}{Q}y^2+C$$

Ha a kút sugara *r* és benne a vízszint magassága *h*, akkor $C=\ln r-\dfrac{\pi k}{Q}h^2$

A víz felszín: $y^2=\dfrac{Q}{\pi k}\ln\dfrac{x}{r}+h^2$

6. Gerenda lehajlása
Egy L hosszú gerenda vízszintesen egyik végén befogva, másik végén P teher.
Befogástól x távolságban $M=P(L-x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P(L-x)}{EI} \quad \text{kétszer integrálva:}$$

$$y=\frac{P}{EI}\cdot\frac{(L-x)^3}{6}+c_1x+c_2$$

A rögzített végnél x=0 esetén y=0 és $y'=0$ ezért

$$c_1=\frac{P}{EI}\cdot\frac{L^2}{2} \quad \text{és} \quad c_2=-\frac{P}{EI}\cdot\frac{L^3}{6} \quad \text{ezért} \quad y=\frac{P}{2EI}\left(Lx^2-\frac{x^3}{3}\right)$$

Lehajlás a rúd végén $h=\dfrac{PL^3}{3EI}$

7. Rezgés, kényszerrezgés
F=ma

a) $m\ddot{x}=-kx \quad m\ddot{x}+kx=0 \quad \dfrac{k}{m}=\omega^2$ jelöléssel $\ddot{x}+\omega^2x=0$ Ennek általános megoldása:

$x=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t \quad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_0$ kezdeti feltétellel: $x=A\sin\omega t$

b) közegellenállás sebességgel arányos

$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x = 0$ A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \omega^2}$

b1) Ha $\frac{\beta}{2} \geq \omega$, akkor λ valós, aperiodikus megoldás, *x* exponenciálisan lecseng.

b2) Ha $\frac{\beta}{2} < \omega$, akkor λ komplex, rezgés exponenciálisan csökkenő amplitúdóval.

c) Kényszerrezgés, periodikus kényszer

$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x = A\sin\omega_k t$

c1) Ha ω_k nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az általános megoldás

$x = c_1 \cos\omega_k t + c_2 \sin\omega_k t$ rezgés a kényszerfrekvencián.

c2) Ha ω_k gyöke a karakterisztikus egyenletnek (rezonancia), akkor a megoldás

$x = c_1 t\cos\omega_k t + c_2 t\sin\omega_k t$ alakú. Az amplitúdó lineárisan megnő, rezonanciakatasztrófa.

8. Kötélgörbe

$T\sin\varphi = ps \qquad T\cos\varphi = H$

$\mathrm{tg}\,\varphi = y' = \frac{p}{H}s \qquad y'' = \frac{p}{H}\sqrt{1 + (y')^2}$

$y' = u$ helyettesítéssel. $\frac{du}{dx} = \frac{p}{H}\sqrt{1 + u^2} \qquad \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{p}{H}dx$

$ar\,\mathrm{sh}\,u = \frac{p}{H}x + c$ Ha x=0 akkor u=0, ezért c=0

$u = \mathrm{sh}\frac{p}{H}x = y' \qquad y = \frac{H}{p}\mathrm{ch}\frac{p}{H}x + C$