Pólya György $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

ha $\cdot\ \varphi(\cdot) = 1$

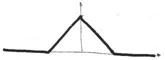
$\cdot\ \varphi_{,} = \varphi(t)$

$\cdot\ \varphi|_{[0,\infty]}$ konvex

akkor $\varphi$ karakterisztikus fgv

$\boxed{\text{Bit}}$ ① $\boxed{a>0}$ $\varphi_a(t) = \left(1 - a|t|\right)_+$ kar. függv

$$\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}}_{\text{vst sűrűségfüggvény.}} dx$$

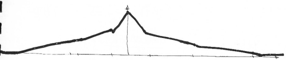


② $p_1, \dots, p_n > 0$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

$a_1, \dots, a_n > 0$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(1 - a_k |t|\right)_+$$

szintén kf, mert kf-ek konvex keveréke



③ minden $\varphi(t)$ a megadott tulajdonságokkal előáll ilyenek pontonkénti limeszeként + folytonossági tétel.

Következmény $0<\alpha\leq 1$

$$\varphi(t) = \exp\{-c\,|t|^{\alpha}\}$$

karakterisztikus fgv

Mi van, ha $\alpha\in(1,2)$?

Tipikus példa minim. stab. konvergenciára:

$\boxed{0<\alpha<2}$ $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.

$$\mathbb{P}(X_j > x) = \mathbb{P}(X_j < -x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0\leq x\leq 1 \\ \frac{1}{2}x^{-\alpha} & 1<x \end{cases}$$

azaz $f(x) = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ \dfrac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} & |x|>1 \end{cases}$

$\varphi(t) := \mathbb{E}(\exp itX_j)$

$1-\varphi(t) = \alpha \int_1^\infty \frac{1-\cos(|t|x)}{x^{\alpha+1}}\, dx \qquad |t|\cdot x = u$

$= \alpha|t|^\alpha \int_{|t|}^\infty \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}\, dx$

$C' := \int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}\, du < \infty$ mert $\underline{0<\alpha<2}$

$1-\varphi(t) = \alpha|t|^\alpha \left(C' + O(|t|^{2-\alpha})\right)$

$= c|t|^\alpha + O(t^2)$

$\mathbb{E}\left(\exp it \frac{S_n}{n^{1/\alpha}}\right) = \left(1 - \frac{c|t|^\alpha}{n} + O(n^{-\frac{2}{\alpha}})\right)^n$

$\longrightarrow e^{-c|t|^\alpha}$

Ergo $\varphi(t) := \exp(-c|t|^\alpha)$ kf és a megfelelő eloszlás $F_\alpha$ határeloszlás $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \Rightarrow F_\alpha$.

Tétel bizonyítása (vázlat)

[be kell látni, hogy, ha $\varphi$ szimmetrikus, stabilis eloszlás kar. függvénye, akkor $\exists\ c>0\ ,\ \alpha\in(0,2]$:

$$\varphi(t)=\exp -c\,|t|^{\alpha}\ ]$$

tfh. az eloszlás nem elfajult ($\Leftrightarrow \varphi \not\equiv 1$)

① $\varphi(t)=\overline{\varphi(t)}=\varphi(-t)$ (triv)

② $\varphi(t)>0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

$$\varphi^2(t)=\varphi(\delta t)$$ valamely $\delta>0$ val
[stabilitás + szimmetr

$\delta\neq 1$ (mert egyébként $\varphi\equiv 1$, kizárva)

köv. ha $\varphi(t_0)=0 \Rightarrow \exists\ t_n\to 0:\ \varphi(t_n)=0$
nem lehet.

③ ha $b\geq a>0:\ \forall t\ \varphi(at)=\varphi(bt) \Rightarrow b=a$

$$\varphi(t)=\varphi\left(\frac{a}{b}\cdot t\right)$$

ha $a<b$ akkor vagy $\varphi\equiv 0$ (kizárva)
vagy $\varphi$ nem folyt. 0-ban
(nem lehet)

④ $\left(\varphi(t)\right)^n = \varphi(g(n)t)$ (stabilitás)

$g(n\cdot m) = g(n)g(m)$

$\left(\varphi(t)\right)^{n\cdot m} = \left(\left(\varphi(t)\right)^n\right)^m = \left(\varphi(g(n)t)\right)^m =$

$\varphi(g(n\cdot m)t) \qquad \varphi(g(n)\cdot g(m)t)$

③-ból kor. $g(n\cdot m) = g(n)\,g(m)$

⑤ $g(p/q) := g(p)/g(q)$

$\left(\varphi(t)\right)^{p/q} = \varphi(g(p/q)t)$

⑥ $r_n \in \mathbb{Q}$ $\quad r_n$ konv $\Rightarrow$ $g(r_n)$ konv.

$r_n \to r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\varphi(g(r_n)t) = \left(\varphi(t)\right)^{r_n} \longrightarrow \left(\varphi(t)\right)^r$

0 és $\infty$ nem lehet $g(r_n)$ torlódási pontja ...

legyen $a, b$ $\quad g(r_n)$ két torlódási pontja

③ $\rightarrow$ $\underline{a=b}$ $\qquad g(x) := \lim_{r\to x} g(r_n)$

(7) $\exists\, \mathbb{R}_+ \ni x \longmapsto g(x)$ folyt :

- $\left(\varphi(t)\right)^x = \varphi(g(x)\,t)$

- $g(xy) = g(x)\,g(y)$

Cauchy probléma (Hf):

$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{folyt} \\ f(x+y) = f(x) + f(y) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = \beta x, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Köv $\quad g(x) = x^{1/\alpha}$

$$\boxed{\varphi(t) = \exp - c\,|t|^{\alpha}}$$

$0 \le \alpha \le 2$ (egyébként nem kar. függv)

Tétel (az előbbi példa általánosítása)

$X_1, X_2, \dots$ i.i.d., eloszlásfüggvényük $F$, kar. függvényük $\varphi$

- $F$ szimmetrikus $F(-x) = 1 - F(x^+)$
- $x^\alpha (1 - F(x)) \longrightarrow b$ amint $x \to \infty$

$0 < \alpha < 2$, $b \in (0, \infty)$

Ekkor $\mathbb{E}\left(\exp\{it\, S_n / n^{1/\alpha}\}\right) \longrightarrow e^{-c|t|^\alpha}$

$c =$

Biz Belátjuk, hogy

$\circledast$ $\varphi(t) = 1 - c\,|t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$, $\boxed{|t| \ll 1}$

ebből

$$\left(\mathbb{E}\exp\{it\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}\}\right) = \left(\varphi\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - c\frac{|t|^\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-c|t|^\alpha}$$

$\circledast$ bizonyítása

$$1 - \varphi(t) = 2\int_0^\infty (1 - \cos tx)\, dF(x) =$$

$\varepsilon > 0$ rögzítve, majd a legvégén $\varepsilon \to 0$

$$= 2\int_0^{(\varepsilon t)^{-1}} (1-\cos tx)\, dF(x) + 2\int_{(\varepsilon t)^{-1}}^{\infty} (1-\cos tx)\, dF(x) = A+B$$

$$|B| \leq 4\left(1 - F((\varepsilon t)^{-1})\right) = 4b\varepsilon^{\alpha} t^{\alpha} + o(|t|^{\alpha})$$

$$A = 2\int_0^{(\varepsilon t)^{-1}} (1-\cos tx)\, d\left(F(x)-1\right)$$

$$= 2\left(1-\cos \varepsilon^{-1}\right)\left(F((\varepsilon t)^{-1}) - 1\right) + 2\int_0^{(\varepsilon t)^{-1}} (1-F(x)) \sin(tx)\cdot t\, dx$$

$$= C + D$$

$$|C| \leq 4b\varepsilon^{\alpha}|t|^{\alpha} + o(t^{\alpha}) \quad [\text{ugyanúgy, mint } B]$$

$$D = 2t^{\alpha}\int_0^{\varepsilon^{-1}} \left(\frac{u}{t}\right)^{\alpha}\left(1 - F\left(\frac{u}{t}\right)\right) \frac{\sin u}{u^{\alpha}}\, du$$

$$= t^{\alpha}\, 2b\int_0^{\varepsilon^{-1}} \frac{\sin u}{u^{\alpha}}\, du + o(t^{\alpha}) \quad \left|\begin{array}{l}\text{Lebesgue}\\ \text{konv.}\\ \text{tétel}\end{array}\right.$$

$$\int_0^{\varepsilon^{-1}} \frac{\sin u}{u^{\alpha}} = \left.\frac{1-\cos u}{u^{\alpha}}\right|_0^{\varepsilon^{-1}} + \alpha\int_0^{\varepsilon^{-1}} \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}\, du =$$

$$= \varepsilon^{\alpha}\left(1-\cos\varepsilon^{1}\right) + \alpha\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}\,du - \alpha\int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}\,du$$

$$\left|D - t^{\alpha}\,2b\,\alpha\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}\,du\right| \leq o(t^{\alpha}) + t^{\alpha}\,8\cdot\varepsilon^{\alpha}$$

végülis :

$$\left|1-\varphi(t) + c\,t^{\alpha}\right| \leq o(t^{\alpha}) + \text{const.}\, t^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}$$

következik $\circledast$ és qed

Alkalmazások, példák szimmetrikus/stabilishoz való gyenge konvergenciára

① $X_1, X_2, \dots$ i.i.d.

eloszlásuk szimmetrikus, abszolút folyt., sűrűségfüggvényük $f$ folytonos 0-ban és $f(0) > 0$.

ekkor: $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_n}\right) \Rightarrow$ Cauchy

② Holtzmark 1.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ [ & \times & \times & \times\times & | & \times & & \times\ \times & ] \\ -n & & & & & & & & +n \end{array}$$

$X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{nn}$ "csillagok" helyei

i.i.d. $UNI[-n, n]$

$x$-helyen lévő "csillag" által keltett erő az origóban: $\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^p}$

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sgn}(X_{nj})}{|X_{nj}|^p}$$ a csillagrendszer által keltett teljes erő az origóban

ha $\frac{1}{2} < p < \infty$

akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\exp\{it F_n\}\right) = e^{-c|t|^{1/p}}$

szimm. stab., $\alpha = \frac{1}{p}$

Biz legyen $Y_j$ $j = 1, 2, \dots$ i.i.d. UNI$[-1,1]$

ekkor $\left(X_{n,j}\right)_{j=1}^{n} \overset{\text{distr.}}{=} \left(n \cdot Y_j\right)_{j=1}^{n}$

és $F_n \overset{\text{distr}}{=} n^{-p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sign}(Y_j)}{|Y_j|^p}$

$\xi_j := \frac{\operatorname{sign}(Y_j)}{|Y_j|^p}$ i.i.d.

szimmetrikus.

$P(\xi_j > x) = P(0 < Y_j < x^{-1/p}) = \dots$

③ Holtzmark 2. (Holtzmark 1920, Chandrasekhar 1940)

töltések / csillagok $\mathbb{R}^d$-ban, $\rho$ sűrűségű Poisson (PPP) pontfolyamat szerint

$\vec{x}$ helyen lévő töltés által keltett erő az origóban $\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^{\beta+1}} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \dfrac{1}{|\vec{x}|^{\beta}}$

$F^{(\rho)}$ a teljes univerzumban lévő töltések által origóban keltett erő egy irányú komponense (ha létezik egyen)

nyilvánvalóan $F^{(\rho)}$ szimmetrikus eloszlású

① Poisson pont folyamat skálázása:

$(X_1^{(\rho)}, X_2^{(\rho)}, \dots)$ $PPP^{(\rho)}$ pontjai

$$\left(X_1^{(\rho)}, X_2^{(\rho)}, \dots\right) \stackrel{\text{distr}}{=} \left(\rho^{-1/d} X_1^{(1)}, \rho^{-1/d} X_2^{(1)}, \dots\right)$$

Köv $F^{(\rho)} \stackrel{\text{distr}}{=} \rho^{\beta/d} F^{(1)}$

② $PPP^{(\rho_1)} \cup PPP^{(\rho_2)} = PPP^{(\rho_1+\rho_2)}$

függetlenek

Köv: $0 \leq \rho_1, \rho_2$

$$(\rho_1+\rho_2)^{p/d} F \overset{\text{distr}}{=} \rho_1^{p/d} F_1 + \rho_2^{p/d} F_2$$

Ha $F$ létezik egyáltalán (azaz

$$\sum_j \frac{\vec{X}_j}{|\vec{X}_j|^{p+1}}$$ konvergens valamilyen értelemben)

akkor

$$\mathbb{E}\left(\exp itF\right) = e^{-c|t|^{\alpha}} \qquad \alpha = \frac{d}{p}$$

$$\boxed{p > \frac{d}{2}}$$

Megj.

(az összeg abszolút konv., ha $p > d$)

① Konvergencia: összegezzünk véges szimmetrikus $\Lambda$ tartományban, majd $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$

② Ha $p \leq \frac{d}{2}$ a távoli töltések hatása divergens

③ Coulomb/gravit: $p = d-1$, OK ha $d \geq 3$!

Általánosabban

Tétel $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d., szimmetrikus eloszlású

$$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x)$$

ahol $L(x)$ lassú változású

$$\left( \forall\, u > 0 \text{ (rögzített) } \lim_{x \to \infty} \frac{L(u \cdot x)}{L(x)} = 1 \right)$$

$$a_n := \inf \{ x : 1 - F(x) \leq n^{-1} \}$$

Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} E\left( \exp it\, S_n / a_n \right) = e^{-c|t|^\alpha}$$

A Szimm. Stab$(\alpha)$ "vonzási tartománya"

$$\{ F : F \text{ szimm}, \ 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x) \}$$

Biz lényegesen munkásabb ...

Szimmetria feltevés nélkül:

Stabilis eloszlás karakterisztikus függvénye

$$\exp\left\{ itb - c|t|^{\alpha}\left(1 + i\kappa\, w_\alpha(t)\right)\right\}$$

$\alpha \in (0, 2]$ "index"

$$w_\alpha(t) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log|t| & \alpha = 1 \end{cases}$$

$\kappa \in [-1, 1]$ "ferdeség paramétere"

$b \in \mathbb{R}$, $c \in (0, \infty)$ lineáris transzformációval változtathatóak

(pl: $b = 0$, $c = 1$)

Megj. 1, $\kappa = 0$, $b = 0$: szimmetrikus

2, $\boxed{\alpha = 2}$, $w_\alpha(t) \equiv 0$, normális

3, az eloszl. abszolút folyt., sűrűségfgv reguláris (kf gyorsan csengle tovább)

4, általában nincs explicit formula az eloszlás sűrűségfüggvényére

Kivételek $\alpha = 2$ : normális

$\alpha = 1$, $k = 0$ : Cauchy

$\alpha = \frac{1}{2}$, $k = 1$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left(-\frac{1}{2y}\right)$$

<u>Határeloszlás tétel</u>: $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.

(i) $\mathbb{P}(|X_j| > x) = x^{-\alpha} L(x)$ $\quad x \to +\infty$

$\boxed{0 < \alpha \leq 2}$

(ii) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{P}(X_j > x)}{\mathbb{P}(X_j < -x)} =: \frac{1+k}{1-k}$

Ekkor

$a_n := \inf\{x : \mathbb{P}(|X_j| > x) = n^{-1}\}$

$b_n := n\,\mathbb{E}\left(X_j \mathbb{1}\{|X_j| \leq a_n\}\right)$

választással

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(\exp it \frac{S_n - b_n}{a_n}\right) = \exp\left\{itb - c|t|^{\alpha}(1 + ik\,w_\alpha(t))\right\}$$

Tétel (i.i.d.-k normált összegeinek határeloszlása stabilis)

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ i.i.d.,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Ha léteznek $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ számsorozatok úgy, hogy

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \Longrightarrow Y,$$

akkor $Y$ stabilis eloszlású

Biz Lemma $W_n$ val. változók sorozata

$\alpha_n \geq 0$, $\beta_n \in \mathbb{R}$ számsorozatok

$$W_n' := \alpha_n W_n + \beta_n$$

Ha $W_n \Longrightarrow W$, $W_n' \Longrightarrow W'$ nem elfajultak, akkor $\alpha_n \longrightarrow \alpha > 0$, $\beta_n \longrightarrow \beta \in \mathbb{R}$

Biz Hf. nagyon hasonló a stan. stab. eloszlás kf-ének átírásában az első lépéshez.

Tétel Sorozatás

$$Z_n := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - b_n}{a_n}$$

$$S_{nk} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots + S_n^{(k)}$$

$$S_n^{(j)} = \sum_{i=n(j-1)}^{nj-1} X_i$$

$$\frac{a_{kn}}{a_n} Z_{nk} - \frac{kb_n - b_{nk}}{a_n} =$$

$$Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + \dots + Z_n^{(k)}$$

k rögzített, $n \longrightarrow \infty$

$$Z_{nk} \Longrightarrow Y$$

$$Z_n^{(j)} \Longrightarrow Y^{(j)}$$ ← ezek egymástól függetlenek

lemmából $\Longrightarrow$ $\frac{a_{nk}}{a_n} \longrightarrow \alpha_k$ $\quad \frac{kb_n - b_{nk}}{a_n} \longrightarrow \beta_k$

$$Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots + Y^{(k)} \overset{distr}{=} \alpha_k Y - \beta_k$$