$$\tilde{\varphi}_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

Ergo $F_n(x) = P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x \right)$

$F_n \Longrightarrow \Phi$ az előbbi tétel alapján.

$\square$ CHT.

Kiegészítő megjegyzések a CHT-hez

① $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ függetlenek, de nem feltétlenül azonos eloszlásúak

$\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{D}^2 X_i = \sigma_i^2$

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Ha X_i-k egyenként kicsik S_n-hez képest, akkor még igaz a CHT

Tétel (Lindeberg)

Legyen $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \mathbb{D}^2(S_n)$

Ha $\forall \varepsilon > 0$-ra

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 \, dF_k(x) = 0$$

Akkor

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{B_n} < x\right) \longrightarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k^2 \; \mathbb{1}\{|X_k| > \varepsilon B_n\}\right) = 0$$

(*) ból következik, hogy $B_n \to \infty$ és hogy X_k-k egyenként kicsik S_n-hez képest

pl. $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{1 \le k \le n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0$.

② Konvergencia sebessége CHT-ben

Tétel (Cramér, Berry, Essén)

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ függetlenek és azonos eloszlásúak. $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{D}^2 X_i = \sigma^2 < \infty$.

Tfh. $\mathbb{E}|X_i|^3 < \infty$. $\exists\, C < \infty$

(abszolút konstans).

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{C\, \mathbb{E}|X_1|^3}{\sqrt{n}}$$

(tovább finomítható, magasabb momentumok feltételezésével)

③ Abszolút folytonos eloszlású X_i-k, sűrűségfüggvényeik egyenletes konvergenciája

Tétel (CHT lokális alakja)

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlásúak. $EX_i = 0$, $D^2 X_i = \sigma^2 < \infty$. Ha $P(X_i < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ és $\sup_y |f(y)| < \infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left| \frac{d}{dx} P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = 0 .$$

Bizonyítás: rafináltabb Fourier analízissel

Lindeberg tétel

$X_{n,m}$ $\quad m = 1, 2, \dots, N_n \quad , \quad n = 1, 2, \dots$

valószínűségi változók széria sorozata:

eloszlásai : $F_{n,m}$

kar. függvényei: $\varphi_{n,m}$

$\mathbb{E} X_{n,m} = 0, \quad \mathbb{D}^2(X_{n,m}) = \mathbb{E}(X_{n,m}^2) = \sigma_{n,m}^2$

rögzített $\underline{n}$ mellett:

$\left(X_{n,m}\right)_{m=1}^{N_n}$ független

$$S_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,N_n}$$

$$\mathbb{E} S_n = 0; \quad \mathbb{D}^2(S_n) = \sum_{m=1}^{N_n} \sigma_{n,m}^2 = \sigma_n^2$$

Tétel (Lindeberg-Feller):

Ha $\forall \varepsilon > 0$

$$(*) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{N_n} \mathbb{E}\left(X_{n,m}^2 \, \mathbb{1}(|X_{n,m}| > \varepsilon \sigma_n)\right) = 0$$

Akkor $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma_n} < x\right) \to \Phi(x)$.

2/

Megjegyzések

① Feltehetjük, hogy $\sigma_n \equiv 1 \quad \forall n$

② A Lindeberg feltétel jelentése:
"mindegyik $X_{n,m}$ komponens elhanyagolhatóan kicsi az S_n összeghez képest"

pl. $$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le m\le N_n} \frac{\sigma_{n,m}^2}{\sigma_n^2} = 0$$

valóban: $$\sigma_{n,m}^2 = \mathbb{E}(X_{n,m}^2)$$
$$= \mathbb{E}\left(X_{n,m}^2 \mathbb{1}(|X_{n,m}| \le \varepsilon\sigma_n)\right) + \mathbb{E}\left(X_{n,m}^2 \mathbb{1}(|X_{n,m}| > \varepsilon\sigma_n)\right)$$
$$\le \varepsilon^2\sigma_n^2 + \mathbb{E}\left(X_{n,m}^2 \mathbb{1}(|X_{n,m}| > \varepsilon\sigma_n)\right)$$

③ A korábbi (i.i.d.-kre vonatkozó) CHT következik

④ bizonyos értelemben ⊛ szükséges és elégséges feltétele a Φ-hez való konvergenciának.

S_r

Bitongítás: $\sigma_n = 1$. $\forall n$.

Bitongítandó, hogy $\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{N_n} \varphi_{n,m}(t) = e^{-t^2/2}$

t rögzítve,

$\varphi_{n,m} = \varphi_{n,m}(t)$ $\qquad w_{n,m} = w_{n,m}(t) := 1 - \frac{\sigma_{n,m}^2 t}{2}$

1. Lemma (elemi analízis)

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \le \min\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}$$

Bit:

$$e^{ix} - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(ix)^k}{k!} = \frac{i^{\ell+1}}{\ell!} \int_0^x (x-s)^{\ell} e^{is}\, ds$$

$$= \frac{i^{\ell}}{(\ell-1)!} \int_0^x (x-s)^{\ell-1} \left(e^{is} - 1\right) ds \quad \text{(indukció)}$$

□ 1.L.

$$\left| \varphi_{n,m}(t) - 1 + \frac{\sigma_{n,m}^2 t^2}{2} \right| =$$

$$\left| \mathbb{E}\left(e^{itX_{n,m}} - \sum_{k=0}^{2} \frac{(i X_{n,m})^k}{k!} \right) \right| \le$$

$$\mathbb{E}\left| e^{itX_{n,m}} - \sum_{k=0}^{2} \frac{(itX_{n,m})^k}{k!} \right| \leq$$

$$\mathbb{E} \min\left\{ \frac{t^3}{6}|X_{n,m}|^3, t^2 |X_{n,m}|^2 \right\} \leq$$

$$\frac{t^3}{6}\mathbb{E}\left(|X_{n,m}|^3 \cdot \mathbb{1}(|X_{n,m}| \leq \varepsilon)\right) + t^2 \mathbb{E}\left(|X_{n,m}|^2 \mathbb{1}(|X_{n,m}| > \varepsilon)\right) \leq$$

$$\frac{\varepsilon t^3}{6} \sigma_{n,m}^2 + t^2 \mathbb{E}\left(|X_{n,m}|^2 \mathbb{1}(|X_{n,m}| > \varepsilon)\right)$$

κοτ: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{m=1}^{N_n} \left| \varphi_{n,m}(t) - 1 + \frac{\sigma_{n,m}^2 t^2}{2} \right| = 0$

$$\left| \sum_{m=1}^{N_n} \log \varphi_{n,m}(t) + \frac{t^2}{2} \right| =$$

$$\left| \sum_{m=1}^{N_n} \left(\log \varphi_{n,m}(t) + \frac{\sigma_{n,m}^2 t^2}{2} \right) \right| \leq$$

$$\sum_{m=1}^{N_n} \left| \log \varphi_{n,m}(t) + \frac{\sigma_{n,m}^2 t^2}{2} \right| \leq$$

$$\sum_{m=1}^{N_n} \left| \log \varphi_{n,m}(t) + (1 - \varphi_{n,m}(t)) \right| +$$

$$\sum_{m=1}^{N_n} \left| \varphi_{n,m}(t) - 1 + \frac{\sigma_{n,m} t^2}{2} \right| = A_n + B_n$$

$B_n \to 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{1\le m\le N_n} |\varphi_{n,m}(t)-1| \le$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{1\le m\le N_n} \left|\varphi_{n,m}(t)-1+\frac{\sigma_{nm}^2 t^2}{2}\right| +$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{1\le m\le N_n} \frac{\sigma_{nm}^2 t^2}{2} = 0$$

Köv: elég nagy n-re $|\varphi_{n,m}(t)-1| < \frac{1}{2}$

és

$$|\log\varphi_{n,m}(t)+(1-\varphi_{n,m}(t))| \le |1-\varphi_{n,m}(t)|^2 \le$$

$$\left(\max_{1\le m'\le N_n}|1-\varphi_{n,m'}(t)|\right)\left(\left|\varphi_{n,m}(t)-1+\frac{\sigma_{nm}^2t^2}{2}\right| + \frac{\sigma_{nm}^2t^2}{2}\right)$$

$$A_n \le \left(\max_{1\le m'\le N_n}|1-\varphi_{n,m'}(t)|\right)\left(B_n+\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\to 0$$

$\square$

Alkalmazások

① Rekordok

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d. folytonos eloszlású

$$X_n = \mathbb{1}\{\xi_n > \xi_j \quad j = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

$X_1, X_2, \ldots$ függetlenek

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{k}$$

$$\mathbb{E} X_k = \frac{1}{k} \qquad \mathbb{D}^2(X_k) = \frac{k-1}{k^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

Nyilvánvaló, hogy alkalmazható a Lindeberg tétel

$$S_n \approx \log n + \sqrt{\log n} \cdot \underbrace{Y}_{N(0,1)}$$

(Kapcsolat véletlen permutációkkal:

$\mathrm{distr}(S_n) = \mathrm{distr}(\{1, \ldots, n\}$ véletlen permutációjának ciklus-száma$)$)

○ A határeset: ∞ szórásnégyzet

$X_1, X_2, \dots$ i.i.d.

- $\mathbb{P}(X_i > x) = \mathbb{P}(X_i < -x)$ $\quad x \geq 0.$ (szimmetrikus)

- $\mathbb{P}(|X_i| > x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad x \geq 1$

$$\mathbb{E}X_i = 0 \quad ; \quad \mathbb{D}^2(X_i) = \infty \quad !!!$$

de $\forall \varepsilon$ $\quad \mathbb{E}(|X|^{2-\varepsilon}) < \infty.$

Tétel $\quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x).$

Bz. levágás: $\quad Y_{n,m} := X_m \, \mathbb{1}\left(|X_m| < n^{1/2} \log\log n\right)$

1) $\sigma_{n,m} = \log n \, (1 + o(1))$

2) $(Y_{n,m})_{m=1}^{n}$ (atomos elhanyagolás? egyenletesen L^2 integrálható?) $\Rightarrow$ Lindeberg feltétel teljesül

3) $\mathbb{P}(\exists\, m \leq n : Y_{n,m} \neq X_m) \leq \frac{1}{(\log\log n)^2} \to 0$

$\square$.

Erdős–Kac tétel megsejtése:

p_m = az m-edik prím

$$\text{igaz} \quad \sum_{p:\,p\le n} \frac{1}{p} = \log\log n + O(1)$$

$X_1, X_2, \ldots$ függetlenek

$$\mathbb{P}(X_m = 1) = \frac{1}{p_m} = 1 - \mathbb{P}(X_m = 0)$$

$$S_n = \sum_{m:\, p_m \le \alpha_n} X_m \qquad \underline{\alpha_n \to \infty}$$

$$S_n \approx \log\log n + \sqrt{\log\log n}\ \xi$$

Erdős–Kac

$g(n)$ = n prím osztóinak száma

Tétel

$$n^{-1} \#\left\{ m \le n : \frac{g(m) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} < x \right\} \to \Phi(x)$$

Erdős-Kac tétel bizonyítása momentum módszerrel:

$$\alpha_n = n^{\frac{1}{\log\log n}}$$

$$\log \alpha_n = \log n / \log\log n$$

$$\log\log \alpha_n = \log\log n - \log\log\log n$$

① $$\sum_{p\le n} \frac{1}{p} - \sum_{p\le \alpha_n} \frac{1}{p} = \sum_{\alpha_n < p \le n} \frac{1}{p} = \dots$$

$$= \log\log\log n + O(1)$$

ergo: ha csak az α_n-nél kisebb prímosztókat számoljuk, nem hibázunk meggyot

② $$\alpha_n \ll n^{\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$X_1, X_2, \dots$ függetlenek, $\mathbb{P}(X_m = 1) = \frac{1}{p_m} = 1 - \mathbb{P}(X_m = 0)$

$Y_{n,m} = \mathbb{1}(p_m \mid \omega)$ ahol ω egyenletes $\{1,\dots,n\}$ -ben

$m = 1, 2, \dots$

$N_n = \max\{m : p_m \leq \alpha_n\}$

$S_n = \sum_{m=1}^{N_n} X_m$ $\quad$ Lindeberg $\quad S_n^* = \frac{S_n - \log\log \alpha_n}{\sqrt{\log\log \alpha_n}} \Longrightarrow N(0,1)$

$T_n = \sum_{m=1}^{N_n} Y_{n,m}$

$Z_n = \sum_{m \geq 1} Y_{n,m}$ $\quad$ Erdős-Kac $\quad \frac{Z_n - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} \Longrightarrow N(0,1)$

1. $\frac{T_n - Z_n}{\sqrt{\log\log n}} \xrightarrow{P} 0$, mert $\mathbb{E}|T_n - Z_n| =$

$$\sum_{\alpha_n < p \leq n} \mathbb{E}(Y_{n,m}) \leq$$

$$\sum_{\alpha_n \leq p \leq n} \frac{1}{p} = \log\log n + O(1)$$

Ergo: elég belátni, hogy $T_n^* = \frac{T_n - \log\log \alpha_n}{\sqrt{\log\log \alpha_n}} \Longrightarrow N(0,1)$

3) $\mathbb{E}(S_n^{*k}) \longrightarrow \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$

számolás

3/ $1 \le m_1 < m_2 < \cdots < m_\ell \le N_n$

$k_1, k_2, \dots, k_\ell \ge 1$

$$\mathbb{E}\left(X_{m_1}^{k_1} X_{m_2}^{k_2} \cdots X_{m_\ell}^{k_\ell} \right) = \mathbb{E}\left(X_{m_1} X_{m_2} \cdots X_{m_\ell} \right) = \frac{1}{p_{m_1} p_{m_2} \cdots p_{m_\ell}}$$

$$\mathbb{E}\left(Y_{n,m_1}^{k_1} Y_{n,m_2}^{k_2} \cdots Y_{n,m_\ell}^{k_\ell} \right) = \mathbb{E}\left(Y_{n,m_1} Y_{n,m_2} \cdots Y_{n,m_\ell} \right) = \frac{1}{n} \left[\frac{n}{p_{m_1} p_{m_2} \cdots p_{m_\ell}} \right]$$

$$\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_N \right)^k = \sum_{1 \le \ell \le N} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_\ell \ge 1 \\ k_1 + \cdots + k_\ell = k}} \sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_\ell \le N} C(\ell, k_1 \dots k_\ell) \cdot x_{m_1}^{k_1} \cdots x_{m_\ell}^{k_\ell}$$

Köv:

$$\left| \mathbb{E} S_n^k - \mathbb{E} T_n^k \right| \le \frac{\alpha_n^k}{n}$$

$$\left| \mathbb{E}\left(S_n - \log\log \alpha_n\right)^k - \mathbb{E}\left(T_n - \log\log \alpha_n\right)^k \right| =$$

$$\left| \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \left(\mathbb{E} S_n^l - \mathbb{E} T_n^l\right) \left(\log\log \alpha_n\right)^{k-l} \right| \leq \frac{\left(\alpha_n + \log\log \alpha_n\right)^k}{n}$$

Κατ': $\mathbb{E}\left(T_n^{*k}\right) \longrightarrow \mu_k$, ανού $n \to \infty$

$\Rightarrow$ Erdős – Kac.

Egy ellenpélda

1) Coupon collector:

Egy urnában (n) különböző színű golyó. Visszatevéssel húzunk mindaddig, amíg minden színt legalább egyszer ki nem húztunk. T_n a húzások száma

$$T_n = \sum_{m=1}^{n} Y_{n,m}, \quad \text{ahol}$$

$(Y_{n,m})_{m=1}^{n}$ függetlenek, $P(Y_{n,m}=k) = \left(\frac{m-1}{n}\right)^{k-1} \frac{n-m+1}{n}$

$k = 1, 2, \dots$

$$\mathbb{E} Y_{n,m} = \frac{n}{n-m+1}$$

$$\operatorname{Var} Y_{n,m} = n \frac{m-1}{(n-m+1)^2}$$

$$X_{n,m} = Y_{n,m} - \mathbb{E} X_{n,m} \quad ; \quad \mathbb{E} X_{n,m} = 0$$

$$\sigma_{n,m}^2 = n \frac{m-1}{(n-m+1)^2}$$

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=1}^{n} \sigma_{n,m}^2 = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k^2} =$$

$$n^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Nagy számok törvénye igaz:

$$\frac{T_n}{\mathbb{E} T_n} \xrightarrow{P} 1 \quad \checkmark$$

De a CHT <u>nem</u>:

$$\frac{\sigma_{n,\,n-k+1}^2}{\sigma_n^2} \longrightarrow \frac{1/k^2}{\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}}.$$

Stabilis eloszlások

Def ekvivalens definíciók

- F eloszlás $\boxed{\text{stabilis}}$ ha: X_1, X_2 független F-eloszlású, $\forall\, a_1, a_2 > 0 \quad \exists\, a_3 > 0,\ b_3 \in \mathbb{R}$ [α, β függenek a_1, a_2-től] úgy hogy
$$X_3 := \frac{1}{a_3}\left(a_1 X_1 + a_2 X_2 - b_3\right)$$
is F eloszlású
- F ekvivalencia osztálya (típusa) zárt a konvolúcióra $\forall a_1, a_2 > 0,\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ $\exists\, \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$:
$$F(a_1 \cdot + b_1) * F(a_2 \cdot + b_2) = F(\alpha \cdot + \beta)$$
- $\forall a_1, a_2 > 0 \quad \exists\, \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$:
$$\varphi(a_1 t)\varphi(a_2 t) = e^{it\beta}\varphi(\alpha t)$$

Def szimmetrikus stabilis eloszlás: F stabilis és
$$F(-x) = 1 - F(x)$$

Tétel Szimmetrikus stabilis eloszlás karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = \exp\{-c|t|^{\alpha}\}$$

$c > 0$ konstans [standardizálható, nem lényeges]

$\alpha \in (0, 2]$ a lényeges paraméter

a stabilis eloszlás $\boxed{\text{indexe}}$.

Megj 1/ $\varphi(t) = e^{-c|t|^{\alpha}}$ nyilvánvaló módon eleget tesz a def. relációnak.

Kérdés : - k.f. - e?

- nincsen-e más?

Ha $\alpha > 2$, $e^{-|t|^{\alpha}}$ nyilvánvaló $\boxed{\text{nem}}$ k.f.

2/ $\alpha = 2$ normális

$\alpha = 1$ Cauchy

$\alpha \neq 1, 2$ re nincsen szép zárt formula

3/ Határeloszlás ...

4/ Szimmetrikus stabilis esetben

$$(a_1+a_2)^{1/\alpha} X \overset{\text{distr}}{=} a_1^{1/\alpha} X_1 + a_2^{1/\alpha} X_2$$