(3) Exponenciális $\text{EXP}(\lambda)$

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} \lambda \, dx = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - it)x} \cdot \lambda \, dx$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - i\frac{t}{\lambda}}$$

(4) Cauchy $\text{CAU}(0,1)$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Reziduum-tétel: $\varphi(t) = e^{-|t|}$

Momentumok és $\varphi(t)$ deriváltjai:

Ha $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$ akkor φ legalább k-szor diffható és
$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \, \mathbb{E}(X^k)$$

Biz: trivi
$$\varphi^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} \, dF(x)$$

ha az integrál abszolút konvergens

Vigyázat: fordítva nem feltétlenül igaz: lehetséges az, hogy φ k-szor diffható $t=0$-ban de $\mathbb{E}|X|^k = \infty$.

Köv. (5)

5) Taylor sorfejtés: ha $\mathbb{E}|X|^m < \infty$, akkor

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}(X^k) \cdot \frac{(it)^k}{k!} + o(t^m),$$

amint $t \to 0$

6) Analitikusság: ha $\forall m \in \mathbb{N}: \quad \mathbb{E}|X|^m < \infty$

és $\liminf\limits_{m\to\infty} \left(\frac{|\mathbb{E}\, X^m|}{m!} \right)^{-1/m} =: R > 0$

akkor

$\varphi(t)$ analitikusan kiterjed a $\{t \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, t| < R\}$ sávra.

Biz. $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \varphi(t_0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{2k} e^{itx}\, dF(x) \right| \leq \mathbb{E}(X^{2k})$$

$$\left| \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \varphi(t_0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{2k+1} e^{itx}\, dF(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k (ix)^{k+1} e^{itx}\, dF(x) \right| \leq$$

(Schwarz) $\leq \sqrt{M_{2k}\, M_{2k+2}}$

Köv. $\liminf\limits_{n\to\infty} \left(\frac{|\varphi^{(n)}(t_0)|}{n!} \right)^{-1/n} \geq R$

Megjegyzés: $\boxed{\text{Momentum probléma}}$

F simasága és φ lecsengése $|t|\to\infty$ kor:

Tétel Legyen $dF(x) = f(x)dx$

Ha $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ $C^{(k)}$ és

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|\,dx < \infty \;, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Akkor

$$\lim_{|t|\to\infty} |t|^k\, |\varphi(t)| = 0.$$

Biz

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

Parciális integrálással:

$$\varphi(t) = \left(\frac{i}{t}\right)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f^{(k)}(x)\,dx \qquad k=0,1,\dots,n$$

Pont: indukcióval

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{itx} f^{(k-1)}(x)}_{\to 0}\,dx = \underbrace{\frac{1}{it} e^{itx} \cdot f^{(k-1)}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int \frac{1}{it} e^{itx} \cdot f^{(k)}(x)\,dx$$

$$|t|^n\, |\varphi(t)| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \underbrace{f^{(n)}(x)}_{\in L_1}\,dx\Big| \longrightarrow 0$$

Riemann lemma alapján

Független változók összegének kar. függvénye:

konvolúció Fourier transzformáltja = Fourier-transzformáltak szorzata.

X, Y független val. változók, $Z = X+Y$

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = \mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX} \cdot e^{itY})$$
$$= \mathbb{E}(e^{itX})\,\mathbb{E}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$

vagy, integrálva

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\, d(F * G)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\, d\left\{\int F(z-y)\, dG(y)\right\}$$
$$= \dots = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, dG(y)\right).$$

Indukcióval: ha $X_1, X_2, \dots, X_n$ függetlenek

$$\varphi_{\sum_i X_i}(t) = \prod_i \varphi_{X_i}(t)$$

CHT előrevetítése: $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{D}^2 X_i = \sigma^2$

$$Y_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\varphi = \varphi_X$

$$\varphi_n = \varphi_{Y_n} : \quad \varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Eloszlásfüggvény rekonstrukciója a karakterisztikus függvényből, azaz: a k.f. valóban karakterisztikus

Probléma lényege: a Fourier trafo invertálása

Ha $dF(x) = f(x)\,dx$, akkor

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \hat{f}(t) \quad \text{(Fourier trafo)}$$

Ekkor: $$f(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt$$

$$= \check{\varphi}(x) \quad \text{(inverz Fourier trafo)}$$

Nehézség: az integrál nem abszolút konvergens

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ha elhisszük a Fourier inverziót, akkor

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it}\,dt$$

Ezt talán könnyebb belátni (esetleg abszolút folytonosság feltétele nélkül is ...)

Tétel F vm eloszlás, φ a karakt. függvénye. $-\infty < a < b < \infty$ szagitva úgy hogy F folytonos a-ban és b-ben

$$F(b) - F(a) \overset{①}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi(t)\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it} + \varphi(t)\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}\right)dt$$

$$\overset{②}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\,dt$$

$$\overset{③}{=} \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\,dt$$

(Érts. $F \longmapsto \varphi$ injektív.)

Biz ①, ② Rényiben (elég technikás)

③ X, Y_σ függetlenek

$$P(X<x) = F(x)\ ;\ P(Y_\sigma<y) = \Phi_\sigma(y) \quad N(0,\sigma^2)$$

$$F_\sigma = F * \Phi_\sigma\ ;\ P(X+Y_\sigma<x) = F_\sigma(x)$$

karakterisztikus függvényei

$$E\left(e^{itX}\right) = \varphi(t)\ ;\ E\left(e^{itY_\sigma}\right) = e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

$$E\left(e^{it(X+Y_\sigma)}\right) = \varphi(t)e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}} =: \varphi_\sigma(t)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\sigma(t)e^{-itx}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\cdot e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\cdot\varphi(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity}\,dF(y)\right\}dt \quad \text{(Fubini)} = \ldots$$

$$\ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-y)} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} dt \right\} dF(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} dF(y) = f_\sigma(x) = F_\sigma'(x)$$

Beláttuk, hogy f_σ-ra valóban igaz a Fourier inverziós formula

$$F_\sigma(b) - F_\sigma(a) = \int_a^b f_\sigma(x)\,dx = \cdots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\sigma(t) \frac{e^{itb} - e^{ita}}{-it}\,dt$$

Belátjuk még, hogy $\lim_{\sigma \to 0^+} F_\sigma(x) = F(x)$ ha F folytonos x-ben

$$|F_\sigma(x) - F(x)| = |P(X + Y_\sigma < x) - P(X < x)| \leq$$

$$\leq P((X < x) \wedge (X + Y_\sigma \geq x)) + P((X \geq x) \wedge (X + Y_\sigma < x)) =$$

lássuk pl. a másodikat:

$$P((X \geq x) \wedge (X + Y_\sigma < x)) =$$

$$P((X \in [x, x+\delta)) \wedge (X + Y_\sigma < x)) +$$

$$P((X \geq x+\delta) \wedge (X + Y_\sigma < x)) \leq$$

$$P(X \in [x, x+\delta)) + P(Y_\sigma < \delta) =$$

$$\{F(x+\delta) - F(x)\} + \Phi_\sigma(-\delta)$$

1: δ legyen olyan kicsi, hogy $F(x+\delta) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2}$; 2: σ legyen olyan kicsi, hogy $\Phi_\sigma(-\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás

Eloszlások gyenge konvergenciája.

Határeloszlás tételek

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciája — általános bevezetés

S : (lokálisan kompakt) metrikus tér

(pl: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, ...)

$\mathcal{B}$: Borel-algebra

Banach tér

$\mathcal{M} = \{ \mu \mid$ véges variációjú reguláris Borel mértékek $\}$

$\|\mu\|_{var} = \sup \left\{ \sum_i |\mu(A_i)| \;\middle|\; A_i \in \mathcal{B} \text{ diszjunktak} \right\}$

Riesz-Markov reprezentációs Tétel:

$$C_0(S)^* = \mathcal{M}$$

$\|\cdot\|_{var}$ topológia $\mathcal{M}$-en $\boxed{\text{túl finom}}$

A természetes jó topológia $\mathcal{M}$-en a $\boxed{\text{weak-}*}$

Valószínűségi mértékek S-en

$$\mathcal{P} = \{\mu \in \mathcal{M} \mid \mu \geq 0,\ \mu(S) = 1\}$$

szimplex

Def. vsz mértékek gyenge konvergenciája

$\mu_n, \mu \in \mathcal{P}$

$\mu_n \Rightarrow \mu$, ha minden $f: S \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvényre

$$\int f\, d\mu_n \longrightarrow \int f\, d\mu$$

Tétel A köv. állítások ekvivalensek

(a) $\mu_n \Rightarrow \mu$

(b) $\forall A \subset S$ nyílt halmazra

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$$

(c) $\forall A \subset S$ zárt halmazra

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \mu(A)$$

Bennünket (egyelőre) leginkább az
$S = \mathbb{R}$ (vagy $S = \mathbb{R}^d$) eset fog
érdekelni:

$Y_n \in \mathbb{R}$ val. változók

$\mu_n(A) = \mathbb{P}(Y_n \in A)$

a μ_n val. mértékek (eloszlások) gyenge
konvergenciája.

$S = \mathbb{R}$ esetben μ-t egyértelműen jellemzi F

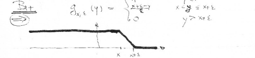
$$F(x) := \mu((-\infty, x))$$

Tétel Legyenek μ_n $n = 1, 2, \ldots$ és μ Borel
val. mértékek $\mathbb{R}$-en, F_n, F az eloszlásfüggvények

$$\left(\mu_n \Rightarrow \mu\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} F_n(x) \longrightarrow F(x), \\ F \text{ folytonossági pontjaiban} \end{array}\right)$$

Biz
($\Rightarrow$)

$$g_{x,\varepsilon}(y) = \begin{cases} 1 & y \le x \\ \frac{x+\varepsilon-y}{\varepsilon} & x < y \le x+\varepsilon \\ 0 & y > x+\varepsilon \end{cases}$$



Vx

$$F_n(x) \le \int g_{x,\varepsilon}(y)\, d\mu_n(y) \le F_n(x+\varepsilon)$$

$$F(x) \le \int g_{x,\varepsilon}(y)\, d\mu(y) \le F(x+\varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int g_{x,\varepsilon}(y)\, d\mu_n(y) = \int g_{x,\varepsilon}(y)\, d\mu(y)$$

Követk.

$$F(x-\varepsilon) \le \liminf F_n(x) \le \limsup F_n(x) \le F(x+\varepsilon)$$

$\Longrightarrow$ QED

(Következmény: Ha $\mu_n \Rightarrow \mu$, $\mu_n \Rightarrow \nu$, akkor $\nu = \mu$) (persze!)

($\Leftarrow$) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folyt., $\sup_x |f(x)| = M < \infty$

(1) $A < \infty$ úgy $\forall n$: $\mu_n(-\infty, -A) + \mu_n(A, \infty) < \varepsilon$
$\mu(-\infty, -A) + \mu(A, \infty) < \varepsilon$

(2) δ: $-A \le x, y \le A$; $|x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f\, d\mu - \int_{-A}^{A} f\, d\mu \right| < \varepsilon M \\ \left| \int_{-\infty}^{\infty} f\, d\mu_n - \int_{-A}^{A} f\, d\mu_n \right| < \varepsilon M \end{cases}$$

② $\Rightarrow$ $-A \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq A$

$|x_i - x_{i-1}| < \delta$; x_i-k folytonossági pontjai F-nek

$$\left| \int_{-A}^{A} f \, d\mu_n - \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \left(F_n(x_j) - F_n(x_{j-1}) \right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_{-A}^{A} f \, d\mu - \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \left(F(x_j) - F(x_{j-1}) \right) \right| < \varepsilon$$

...

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f \, d\mu - \int_{-\infty}^{\infty} f \, d\mu_n \right| \leq 2(M+1)\varepsilon + \underbrace{2M \sum_{j=1}^{k} |F(x_j) - F_n(x_j)|}_{\downarrow \; 0}$$

QED. □

Példák ① (14. feladat)

$$X_n, X : \Omega \to \mathbb{R} \quad ; \mathbb{P}(X_n \in \cdot) = \mu_n(\cdot)$$
$$\mathbb{P}(X \in \cdot) = \mu(\cdot)$$

$$\left(X_n \xrightarrow{P} X \right) \Rightarrow \left(\mu_n \Rightarrow \mu \right)$$

De $\boxed{\text{nem}}$ ez a tipikus előfordulás.

② Moivre Laplace CHT: $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x \right) \to \Phi(x)$ ez a tipikus

Def:

Feszesség - kompaktság

- μ_n vsz mértékek $\mathbb{R}$-en

μ_n sorozat feszes, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M < \infty$:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu_n(-M, M) > 1 - \varepsilon$.

- általánosabban:

μ_n vsz mértékek az S metrikus téren

μ_n sorozat feszes, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subset S$ kompakt, úgy, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mu_n(K) > 1 - \varepsilon$

Tétel Ha $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ feszes, akkor $\exists k \mapsto n_k$ részsorozat, úgy, hogy $(\mu_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ gyengén konvergens (Prohorov tétel).

Biz $\boxed{\mathbb{R}\text{-en}}$

n' részsorozat úgy, hogy $\forall q \in \mathbb{Q}$: $F_n(q) \to L(q)$

(1) monotonság: $q' \leq q \Rightarrow L(q') \leq L(q)$
mert monoton függvények limesze

(2) Feszességből $\Rightarrow$ $\lim_{q \to -\infty} L(q) = 0$, $\lim_{q \to +\infty} L(q) = 1$

$F(x) := \sup \{ L(q) \mid q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, x) \}$

Ebből folytonos lesz és örökli L alaptulajdonságait

F eloszlásfgv

Bizonyítandó még:

$$F(x-\varepsilon) \leq \liminf_{n'\to\infty} F_{n'}(x) \leq \limsup_{n'\to\infty} F_{n'}(x) \leq F(x+\varepsilon)$$

Legyen $x-\varepsilon < q < x$, $q \in \mathbb{Q}$

$$\liminf F_{n'}(x) \geq \lim F_{n'}(q) = L(q) \geq F(x-\varepsilon)$$

$x < q < x+\varepsilon$

$$\limsup F_{n'}(x) \leq \lim F_{n'}(q) = L(q) \leq F(x+\varepsilon)$$

□ Prohorov

Megjegyzés Prohorov tétel Metrikus térekben

S metrikus tér, $\mu_n \in \mathcal{P}$

Ha $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ feszes, akkor $\exists$ $k \mapsto n_k$ részsorozat úgy, hogy $(\mu_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ gyengén konvergens.

Eloszlások gyenge konvergenciája és a karakterisztikus függvények konvergenciája.

F_n, F eloszlásfüggvények

$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_n(x)$; $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$

$$\left(F_n \Rightarrow F\right) \Rightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R}: \ \varphi_n(t) \to \varphi(t)\right)$$

gyenge konv. definíciójából

Igaz-e a megfordított állítás?

Tétel Legyenek $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ val. mértékek $\mathbb{R}$-en, $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ a karakterisztikus függvényeik.
Ha $\forall t \in \mathbb{R}: \ \varphi_n(t) \to \varphi(t)$ és $\varphi(t)$ folytonos $t=0$-ban, akkor $\exists\ \mu$ val. mérték $\mathbb{R}$-en, úgy hogy $\varphi = \mu$ karakterisztikus függvénye és $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Bizonyítás
Alapgondolat: φ folytonosságából ($t=0$-ban) következik $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ feszessége!

Lemma X val. változó ; $\psi(t) = \mathbb{E} \exp(itX)$ a karakterisztikus függvénye. Ekkor $\forall K < \infty$-re

$$\mathbb{P}(|X| > K) \le \frac{K}{2} \int_{-2/K}^{2/K} (1 - \psi(t))\, dt .$$

(Használós nagy K-ra!)

Biz

$$\frac{K}{2} \int_{-2/K}^{2/K} (1 - \psi(t))\, dt = \frac{K}{2} \int_{-2/K}^{2/K} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx})\, dF(x) \right\} dt \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \frac{2}{K}x}{\frac{2}{K}x}\right) dF(x) \ge 2 \left\{ \int_{-\infty}^{-K} + \int_{K}^{\infty} \right\} \left(1 - \frac{\sin \frac{2}{K}x}{\frac{2}{K}x}\right) dF(x) \ge$$

$$\ge 2 \left\{ \int_{-\infty}^{-K} + \int_{K}^{+\infty} \right\} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\left|\frac{2x}{K}\right|}\right)}_{\ge \frac{1}{2}} dF(x) \ge \left\{ \int_{-\infty}^{-K} + \int_{K}^{\infty} \right\} dF(x) \ge$$

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} < \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\ge \mathbb{P}(|X| > K)$$

□ Lemma

Tétel bizonyítása:

φ folytonosságából $\Rightarrow \exists K$ ∞: $\frac{K}{2} \int_{-2/K}^{2/K} (1-\varphi(t))\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}$

$\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ + Lebesgue konvergencia tétel:

$(\exists n_0)\ (\forall n \ge n_0)$: $\frac{K}{2} \int_{-2/K}^{2/K} (1-\varphi_n(t))\,dt \le \varepsilon$

Lemma $\Rightarrow (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ feszes

Tfh. $\mu_n \not\Rightarrow \mu$ + feszesség $\Rightarrow \exists\ k \mapsto n_k$

részsorozat úgy hogy $\mu_{n_k} \Rightarrow \nu \ne \mu$

Ekkor viszont $(\forall t)$: $\varphi_{n_k}(t) \longrightarrow \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\nu(t)$

De ugyanakkor $\varphi_{n_k}(t) \longrightarrow \varphi(t)$

$$\varphi(t) = \psi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\nu = \mu \quad \text{ellentmondás.}$$

☒ Tétel

Centrális Határeloszlás Tétel – Teljes Pompájában

Emlékeztető: De Moivre – Laplace CHT

① $S_n \quad BIN(p, n) \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

X_i független azonos eloszlásúak $\quad \mathbb{P}(X_i = 1) = p$
$\mathbb{P}(X_i = 0) = q$

CHT

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b \right) \longrightarrow \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$np = n\,\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}S_n$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{n}\,\mathbb{D}(X_i) = \mathbb{D}(S_n)$$

② $S_n \quad POI(n\lambda) \qquad \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

X_i független, azonos eloszlásúak $\quad \mathbb{P}(X_i = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

R

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le b\right) \to \Phi(b)-\Phi(a)$$

$n\lambda = n\,\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}S_n$

$\sqrt{n\lambda} = \sqrt{n}\,\mathbb{D}(X_i) = \mathbb{D}(S_n)$

(3) S_n $\Gamma(n,\lambda)$ eloszlású $\mathbb{P}(S_n \in (t,t+dt))=$

$S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$

X_i független, azonos eloszlású, $\mathbb{P}(X_i \in (t,t+dt)) = \lambda e^{-\lambda t}\,dt$

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - n\lambda^{-1}}{\sqrt{n\lambda^{-2}}} \le b\right) \to \Phi(b)-\Phi(a)$$

(4) $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$, ahol

X_i független, azonos eloszlású X_i $E(0,1)$
egyenletes $(0,1)$-b

$f_n(x) := \frac{d}{dx}\mathbb{P}(S_n < x)$, S_n sűrűségfüggvénye

$\tilde{f}_n(x) := \sqrt{\frac{n}{12}}\, f_n\left(\sqrt{\frac{n}{12}}\,x + \frac{n}{2}\right)$

$\tilde{f}_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$

Mind a négy esetben: explicit számolás

$\boxed{\text{Stirling formula}}$ segítségével

Vajon igaz-e teljes általánosságban?

Tétel (CHT)

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók végtelen sorozata, $m := \mathbb{E}X_i$, $\sigma^2 = \mathbb{D}^2(X_i) < \infty$.

Ekkor

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b\right) \to \phi(b) - \phi(a)$$

(vagyis: $n \cdot m = \mathbb{E}S_n$; $n\sigma^2 = \mathbb{D}^2(S_n)$).

Biz. Tfh. $m = 0$. (egyébként $X_i' = X_i - m$)

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{itX} = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\varphi_n(t) := \mathbb{E}e^{itS_n} = \varphi(t)^n$$

$$\tilde{\varphi}_n(t) := \mathbb{E}\exp\left(it\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \varphi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n$$