Következmény: Nagy Számok Erős Törvénye (negyedik momentummal)

Tétel

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\quad X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad i = 1, 2, \dots$

független, azonos eloszlású. Tfh. $EX_i^4 < \infty$

Ekkor $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m) \xrightarrow{m.b.} 0$ $\quad m := EX.$

Biz. Feltehetjük, hogy $m = 0$

$$P\left(\left|n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i\right| > \frac{1}{r}\right) \leq \frac{r^4 \, E\left|\sum_i^n X_i\right|^4}{n^4}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = n\, E X_1^4 + 6\binom{n}{2} E(X_1^2) \leq C \cdot n^2$$

$$P\left(\left|n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i\right| > \frac{1}{r}\right) \leq \frac{r^4 \cdot C}{n^2}$$

$\Rightarrow$ (Borel Cantelli): $\mathbb{P}(F_r) = 0$, ahol

$$F_r = \left\{ \omega \;\middle|\; \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq \frac{1}{r} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| > 0\right) = P\left(\bigcup_r F_r\right) = 0$$

□

(9)

Megjegyzés momentum feltétel gyengíthető – később.

Az erős tétel: $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. - k

Ha $E|X_i| < \infty$ és $EX_i =: m$

Akkor $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{m.b.} m$

Bizonyítás később

Nagy Számok Erős Törvénye – teljes formájában

1. Tétel: Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású val. változók (egyazon $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószín. értelmezve), melyekre $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ és $\mathbb{E}X_i =: \mu$. Ekkor

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{m.b.}} \mu \text{ , amint } n \to \infty$$

Azaz: $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu \right) = 1$.

Hosszú a bizonyítás, sőt bonyolult!!!

Kolmogorov egyenlőtlenség: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek (nem feltétlenül azonos eloszlásúak!) $\mathbb{E}X_i^2 = \sigma_i^2$, $\mathbb{E}X_i = 0$

Ekkor:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \le i \le n} |X_1 + X_2 + \cdots + X_i| \ge \lambda \right) \le \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\lambda^2}$$

Megjegyzés: Csebisev alapján

$$\mathbb{P}\left(|X_1 + X_2 + \cdots + X_n| \ge \lambda \right) \le \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\lambda^2}$$

Kolmogorov egyenlőtlenség bizonyítása:

$$S_i := \sum_{j=1}^{i} X_j$$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \max_{1\le i\le n} |S_i| \ge \lambda\}$$

$$A_i = \{\omega \in \Omega \mid \max_{1\le j\le i-1} |S_j| < \lambda;\ |S_i| \ge \lambda\}$$

$$i \ne j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad ; \quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \mathbb{E}\left(S_n^2\right) \ge \mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbb{1}_A\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbb{1}_{A_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbb{E}\left(S_i^2 \mathbb{1}_{A_i}\right) + 2 \underbrace{\mathbb{E}\left((S_n - S_i) S_i \mathbb{1}_{A_i}\right)}_{* = 0} + \underbrace{\mathbb{E}\left((S_n - S_i)^2 \mathbb{1}_{A_i}\right)}_{\ge 0} \right\} \ge$$

(függetlenség)

$$\ge \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(S_i^2 \mathbb{1}_{A_i}\right) \ge \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \lambda^2 \mathbb{P}(A)$$

$\boxed{\square \text{ Kolmogorov}}$

$$* \quad \mathbb{E}\left((S_n - S_i) S_i \mathbb{1}_{A_i}\right) = \underbrace{\mathbb{E}\left(S_n - S_i\right)}_{=0} \mathbb{E}\left(S_i \mathbb{1}_{A_i}\right) = 0.$$

2. Tétel Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek (egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-n)

$\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = \sigma_i^2$ olyanok, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty.$$

Ekkor $\mathbb{P}\left(\text{létezik } \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 1.$

Megjegyzések: ① A konvergenciát "véletlen kiegyenlítődésből" [illegible]. Nincs abszolút konvergencia.

Pl. $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xi_k$, ahol

ξ_k i.i.d. $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$

② Kapcsolat a Carleson tétellel (bizonyítás után)

2. Tétel bizonyítása:

$$A_{N,r} = \{\omega \mid \exists\, i, j \geq N : |S_i - S_j| > \tfrac{1}{r}\}$$

$$A_{N+1,r} \subseteq A_{N,r} \subseteq A_{N,r+1}$$

$$\{\omega \mid S_n \text{ nem Cauchy}\} = \bigcup_r \bigcap_N A_{N,r}$$

$$\mathbb{P}(S_n \text{ nem Cauchy}) = \lim_{r\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_{N,r})$$

Belátjuk, hogy $\forall r$ $\lim_{N\to\infty} P(A_{N,r}) = 0$.

$B_{N,r} = \{\omega \mid \exists\, i \geq N : |S_i - S_N| > \frac{1}{2r}\}$

$A_{N,r} \subseteq B_{N,\frac{1}{2r}}$, mert

$|S_i - S_j| > \frac{1}{r} \Rightarrow \max\{|S_i - S_N|, |S_j - S_N|\} > \frac{1}{2r}$

Belátjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra $\lim_{N\to\infty} P(B_{N,\varepsilon}) = 0$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{N\leq i} |S_i - S_N| > \varepsilon\right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{N'\to\infty} P\left(\max_{N\leq i\leq N'} |S_i - S_N| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{N'\to\infty} \frac{\sum_{i=N+1}^{N'} \sigma_i^2}{\varepsilon^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=N+1}^{\infty} \sigma_i^2}{\varepsilon^2} = 0.$$

$\boxed{\square \text{ 2. tétel}}$

3. Tétel. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek, $\mathbb{E}X_i = \mu_i$, $D^2 X_i = \sigma_i^2$ olyanok, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} < \infty$. Ekkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)}{n} = 0\right) = 1.$$

3. Tétel bizonyítása:

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_i}{i}, \quad \begin{cases} D^2(Y_i) = \frac{s_i^2}{i^2} \\ EY_i = 0 \end{cases}$$

Y_i-re alkalmazzuk a 2. Tételt:

$$(*) \quad P\left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \text{ konvergens} \right) = 1.$$

Lemma: legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy számsorozat

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \text{ konvergens} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \longrightarrow 0$$

Lemma bizonyítása:

$$r_n := \sum_{i=n}^{\infty} \frac{a_i}{i}, \quad \text{Ekkor } \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i - n r_{n+1}$$

$$M = \sup_n |r_n| < \infty \; ; \; n_0 : n > n_0 \Rightarrow |r_n| < \varepsilon$$

$n > n_0$

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{n_0} r_i}{n} + \frac{\sum_{i=n_0+1}^{n} r_i}{n} - r_{n+1} \right|$$

$$\leq M \frac{n_0}{n} + \left(\frac{n - n_0}{n} + 1 \right) \varepsilon$$

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \right| \leq 2\varepsilon$$

$\boxed{\square \text{ Lemma}}$

Lemma alapján

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu_i}{i} \text{ konvergens} \right\} \subseteq \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)}{n} \longrightarrow 0 \right\}$$

Tehát

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \text{ konvergens} \right) = 1 \Rightarrow \text{a 3.tétel állítása}$$

$\boxed{\square \text{ 3. Tétel}}$

$\boxed{\text{1. Tétel bizonyítása}}$ Tegyük fel hogy $EX_i = \mu_i = 0$

$$Y_i := X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \le i\}} = \begin{cases} X_i & \text{ha } |X_i| \le i \\ 0 & \text{ha } |X_i| > i \end{cases}$$

$$Z_i := X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| > i\}} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |X_i| \le i \\ X_i & \text{ha } |X_i| > i \end{cases}$$

$$X_i = Y_i + Z_i$$

Belátjuk, hogy: ① $\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} \to 0 \right) = 1$

② $\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \to 0 \right) = 1$

(1) $\mathbb{P}(Z_k \neq 0) = \mathbb{P}(|X_k| > k) = \left[1 - F(k^+)\right] + F(-k)$

$$\leq \int_{k-1}^{k} (1-F(x))\,dx + \int_{-k}^{-k+1} F(x)\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_k \neq 0) \leq \int_0^{\infty} (1-F(x))\,dx + \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx$$

$$(\text{parc. integr.}) = \int_0^{\infty} x\,dF(x) - \int_{-\infty}^{0} x\,dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF(x) = \mathbb{E}\left(|X_i|\right) < \infty$$

Borel-Cantelli $\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} \{Z_k \neq 0\}\right) = 0$

azaz: $\mathbb{P}\left(\#\{k \in \mathbb{N} \mid Z_k \neq 0\} < \infty\right) = 1$

követk: $\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} \longrightarrow 0\right) = 1.$

(2) $\mathbb{E}\, Y_k = \tilde{\mu}_k$

$$\mathbb{D}^2(Y_k) = \mathbb{E}\, Y_k^2 - (\tilde{\mu}_k)^2 \leq \mathbb{E}\, Y_k^2 = \int_{-k}^{k} x^2\,dF(x).$$

Lemma: $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dF(x) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-k}^{k} |x|^2\,dF(x) < \infty.$

Lemma Bizonyítása: $a_n := \int_{n-1}^{n} x\,dF(x) - \int_{-n}^{-n+1} x\,dF(x) \geq 0$

$$\int_{n-1}^{n} x^2 dF(x) + \int_{-n}^{-n+1} x^2 dF(x) \le n \cdot a_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-k}^{k} x^2 dF(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=1}^{k} \ell a_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell a_\ell \cdot \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le$$

$$\le \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell a_\ell \cdot \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{4}{(k+1)^2} \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell a_\ell \int_{\ell}^{\infty} \frac{4}{y^2} dy =$$

$$= 4 \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell = 4 \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) = 4E|X_i| < \infty$$

$\boxed{\square \text{ Lemma}}$

<u>Köv</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^2(Y_k)}{k^2} < \infty$, 3. Tétel alkalmazható:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}_i}{n} \right) = 0 \right) = 1.$$

<u>De</u> $\tilde{\mu}_k = \int_{-k}^{k} x \, dF(x) \xrightarrow{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}_i}{n} = 0$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = 0 \right) = 1$$

$\boxed{\square \text{ 4. Tétel.}}$

Kolmogorov 0-1 Törvény

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vsz. mező

- $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}$ rész σ-algebrák függetlenek ha $\forall\, B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)$$

- $X_1, X_2, \dots$ függetlenek

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n, \dots \qquad \mathcal{B}_j = \sigma(X_j)$

$k \leq l \leq \infty$: $\mathcal{B}_k^l = \bigvee_{j=k}^{l} \mathcal{B}_j \quad , \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}_1^\infty$

ha $[k,l] \cap [m,n] = \emptyset \Rightarrow \mathcal{B}_k^l$ és $\mathcal{B}_m^n$ függetlenek

$$\mathcal{T} = \bigcap_{m \geq 1} \mathcal{B}_m^\infty \quad \text{– "tail-algebra"}$$

olyan események vannak benne, amelyek érzéketlenek bármely véges sok X_i megváltoztatására

pl. $\{\omega \mid \exists \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\} \in \mathcal{T}$

$\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = a\} \in \mathcal{T}$

$\{\omega \mid \exists \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}\} \in \mathcal{T}$

de $\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k} = a\} \notin \mathcal{T}$

Tétel (0-1) $\mathcal{A}$ $\mathcal{T}$ algebra triviális, azaz
$\forall A \in \mathcal{T}$: $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy 1

Biz $A \in \mathcal{T}$ $\quad A_n \in \mathcal{B}_1^n$: $\mathbb{P}(A \circ A_n) \to 0$.

$$P(A \cap A_n) \longrightarrow P(A)$$

mert A és A_n független

$$\| $$

$$P(A)P(A_n) \longrightarrow P(A)^2$$

$$P(A) = P(A)^2$$

$\boxed{\Rightarrow 0\text{-}1.}$

Iterált logaritmus tétel

$X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású

Egyszerűség kedvéért: $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E} X_i = 0$; $\mathbb{D}^2 X_i = \sigma^2 = 1$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

NSZET: $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \right) = 1$

CHT $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x \right) \longrightarrow \Phi(x)$

Kis munkával:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty,\ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \right) = 1$$

Hol a határvonal a két viselkedés között?

Van-e $n \mapsto \varphi(n)$ úgy hogy

ha $\psi(n) \ll \varphi(n)$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{S_n}{\psi(n)} = \infty,\ \liminf \frac{S_n}{\psi(n)} = -\infty \right) = 1$$

ha $\psi(n) \gg \varphi(n)$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\psi(n)} = 0 \right) = 1$$

Hausdorff (1913) $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/2+\varepsilon}} = 0 \right) = 1$$

~~Bi~~

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > \delta n^{1/2+\varepsilon} \right) \leq \frac{\mathbb{E}|S_n|^{2k}}{\delta^{2k} \; n^{k+2\varepsilon k}}$$

$$\mathbb{E}\, S_n^{2k} \leq C(k)\, n^k$$

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > \delta \cdot n^{1/2+\varepsilon} \right) \leq \frac{C(k)}{\delta^{2k}} \; n^{-2\varepsilon k}$$

ha $k > 2\varepsilon$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\varepsilon k} < \infty$.

$$\text{B-C I} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\text{csak véges sok } n\text{-re: } \frac{|S_n|}{n^{1/2+\varepsilon}} > \delta \right) = 1$$

$\Rightarrow$ QED.

$\square$ Hausdorff

Hardy-Littlewood (1914) (kicsit módosítva)

X_i független azonos eloszlásúak, korlátosak:

$\exists M < \infty : \mathbb{P}(|X_i| \le M) = 1.$

$\mathbb{E}X_i = 0, \quad \mathbb{D}^2 X_i = \sigma^2$

Ekkor:

$$\mathbb{P}\left(-1 \le \underline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log n}} \le \overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log n}} \le 1\right) = 1$$

Bizonyítás:

Igazság: Iterált logaritmus tétel (Hincsin 1924)

$X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású val. változók

$\mathbb{E}X_i = 0, \quad \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{D}^2 X_i = \sigma^2 < \infty$

Ekkor

$$\mathbb{P}\left(-1 = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \lg\lg n}} < \limsup \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \lg\lg n}} = 1\right) = 1$$

$$\lg\lg n = \lg(\lg n)$$

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás (11)

Analitikus eszközök II: <u>A karakterisztikus függvény</u>

X val. változó, $F_X(x) = P(X < x)$ eloszlásfgv-e

Def karakterisztikus függvény:

$$\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_X(t) := \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

(azaz: φ az F eloszl.fgv Fourier - Stieltjes transzformáltja)

Alaptulajdonságok:

megjegyzés % a túloldalon

1 Tétel (1) $\varphi(0) = 1$, és $\forall t \in \mathbb{R}$ $|\varphi(t)| \le 1$

(2) $t \longmapsto \varphi(t)$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en

(3) $t \longmapsto \varphi(t)$ "pozitív típusú" azaz

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \overline{z_l}\, \varphi(t_k - t_l) \ge 0$$

További elemi tulajdonságok:

- $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$ (triv)
- $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ (triv)

Megjegyzés a Tétel (1) részéhez

X val. változó eloszlása rácsos ha

$\exists\ d>0,\quad r\in[0,d)$ úgy hogy

$$\mathbb{P}\left(X\in\{kd+r \mid k\in\mathbb{Z}\}\right)=1$$

azaz: X megengedett értékei egy számtani sorozatból vannak

Tétel
- ha X nem rácsos eloszlású, akkor
$$t\neq 0 \Rightarrow |\varphi_X(t)|<1$$
- ha X rácsos eloszlású, akkor
$$\varphi_X\left(\frac{2\pi n}{d}\right)=\exp\left(i\,2\pi n\frac{r}{d}\right)$$

Biz Tvin

Tétel bizonyítása:

(1) $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(e^{i\cdot 0X}) = \mathbb{E}(1) = 1$

$|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}(e^{itX})| \le \mathbb{E}|e^{itX}| = 1$

(2) $|\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| = |\mathbb{E}(e^{itX}) - \mathbb{E}(e^{isX})| =$

$|\mathbb{E}(e^{itX} - e^{isX})| \le \mathbb{E}|e^{itX} - e^{isX}| =$

$= \mathbb{E}\left(|e^{itX} - e^{isX}|\, \mathbb{1}_{\{|X|<M\}}\right) +$

$\mathbb{E}\left(|e^{itX} - e^{isX}|\, \mathbb{1}_{\{|X|\ge M\}}\right) \le$

$\le |t-s|M + 2\mathbb{P}(|X| \ge M)$

használjuk (1) $|e^{ia} - e^{ib}| \le |a-b|$ ha $a,b \in \mathbb{R}$

(2) $|e^{ia} - e^{ib}| \le 2$ ha $a,b \in \mathbb{R}$

legyen M olyan nagy, hogy $\mathbb{P}(|X| \ge M) < \frac{\varepsilon}{4}$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$

Ekkor: $|t-s| < \delta \Rightarrow |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| < \varepsilon$

(3) $\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l\, \varphi(t_k - t_l) = \sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l\, \mathbb{E}(e^{i(t_k - t_l)X}) = \dots$

$= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} e^{it_k X} \cdot z_k\right|^2 \ge 0.$ ☒

(3)

Bochner tétel Ha $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ re igaz a köv

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi \text{ folytonos } t = \text{ -ban} \\ \varphi \text{ pozitív típusú} \end{cases}$$

Akkor φ egy F-eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye

(Bizonyítás: pl. Read & Simon vol II.)

Konkrét példák

① Normális $N(m, \sigma)$ $\qquad Y = m + \sigma X$

$$\varphi_{m,\sigma}(t) = e^{imt} \varphi_{0,1}(\sigma t)$$

$$\varphi_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} \cdot e^{-t^2/2} = e^{-t^2/2}$$

$$\varphi_{m,\sigma}(t) = \exp\left\{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

② Egyenletes $E(a, b)$, $UNI(a, b)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$