$\xi_{n,i}$ $\quad$ $n = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ | teljesen függetlenek, azonos p eloszlásúak

$$Y_0 = 1, \qquad Y_{n+1} = \sum_{i=1}^{Y_n} \xi_{n+1,\, i}$$

$$G_n(z) = \mathbb{E}\left(z^{Y_n}\right) \qquad G_{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(z^{Y_{n+1}} \mid Y_n = k\right) \mathbb{P}(Y_n = k)$$

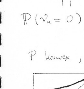
Előbbiek szerint (véletlen tagszámú összeg): $= G_n(P(z))$

$$\left.\begin{array}{l} G_{n+1}(z) = G_n(P(z)) \\ G_0(z) = z \end{array}\right\} \Rightarrow G_n(z) = P \circ P \circ \dots \circ P(z)$$

Kihal-e a populáció?

$$\mathbb{P}(\nu_n = 0) = G_n(0) = \underbrace{P \circ P \circ P \cdots P \circ P(0)}_{n \text{ szer}}$$

P konvex, növekvő, $0 \le P(0) \le P(1) = 1$

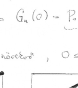


$P'(1) = m < 1$

szubkritikus

$G_n(0) \to 1$

exponenciálisan gyorsan

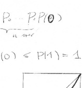


$P'(1) = m = 1$

kritikus

$G_n(0) \to 1$

hatvány rendben



$P'(1) = m > 1$

szuperkritikus

$G_n(0) \to \alpha < 1$

$1 - \alpha$ a túlélési valószínűség

Legyen $m_n = \mathbb{E}(Y_n)$; $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(Y_n)$

Határozzuk meg m_n-et és σ_n^2-et (rekurzív formula útján)

$$m_{n+1} = G'_{n+1}\Big|_{z=1} = (G'_n \circ P)\cdot P'\Big|_{z=1} = G'_n(P(1))\,P'(1) = m_n \cdot m$$

$$\boxed{m_n = m^n}$$

$$\sigma^2_{n+1} = \left\{G''_{n+1} + G'_{n+1}(1 - G'_{n+1})\right\}_{z=1}$$

$$= G''_{n+1}\Big|_{z=1} + m^{n+1}(1 - m^{n+1})$$

$$G''_{n+1} = \left((G'_n \circ P)\,P'\right)' = (G''_n \circ P)(P')^2 + (G'_n \circ P)\,P''$$

$z=1$

$$\sigma^2_{n+1} = \left(\sigma_n^2 - m^n + m^{2n}\right)m^2 + \left(\sigma^2 - m + m^2\right)m^n + \left(1 - m^{n+1}\right)m^{n+1}$$

$$= \sigma_n^2 \cdot m^2 + m^n \sigma^2$$

$$\boxed{\sigma_n^2 = m^{n-1}\cdot\frac{m^n - 1}{m - 1}\cdot\sigma^2} \qquad m \neq 1$$

$$\boxed{\sigma_n^2 = n\cdot\sigma^2} \qquad m = 1 \quad \text{kritikus}$$

Comment.

(2) Bolyongások

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \qquad \xi_i \text{ függetlenek}$$

$$\mathbb{P}(\xi_i = +1) = p \,;\, \mathbb{P}(\xi_i = -1) = q$$
$$p + q = 1$$

Elérési idő: $k \geq 1$, $\tau^{(k)} = \inf\{n \mid S_n = k\}$, $\inf \emptyset = \infty$

$\tau^{(k)}$ a k rácspont első elérési ideje

$$\tau^{(k)} = \tau_1^{(1)} + \tau_2^{(1)} + \dots + \tau_k^{(1)}$$

$$\tau_1^{(1)} = \tau^{(1)}, \quad \tau_j^{(1)} = \tau^{(j)} - \tau^{(j-1)} : (j-1) \text{ ből } j\text{-be jutás ideje}$$

$\left(\tau_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}$ függetlenek és $\tau^{(1)}$-el azonos eloszlásúak

$$\mathbb{E}\left(z^{\tau^{(k)}}\right) = \Phi^{(k)}(z) = \left(\Phi_1(z)\right)^k, \text{ ahol } \Phi^{(1)}(z) = \mathbb{E}\left(z^{\tau^{(1)}}\right)$$
$$\phi(z)$$

Számoljuk ki $\Phi(z)$-t

$$\Phi(z) = \mathbb{E}\left(z^{\tau^{(1)}}\right) = \mathbb{E}\left(z^{\tau^{(1)}} \mid \xi_1 = +1\right)\mathbb{P}(\xi_1 = +1) + \mathbb{E}\left(z^{\tau^{(1)}} \mid \xi_1 = -1\right)\mathbb{P}(\xi_1 = -1)$$

$$= z \cdot p + z\,\Phi^{(2)}(z)\, q = pz + q z (\Phi(z))^2$$

$$\boxed{\Phi(z) = p \cdot z + q z \cdot (\Phi(z))^2}$$

$$\boxed{\Phi(z) = \frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2qz}} \qquad (10) \qquad 1-4pq = |p-q|^2$$

(a $\ominus$ ágat kell választani mert $\Phi(0)=0$!)

- $$\Phi(1) = \begin{cases} 1 & q \le \frac{1}{2} \le p \\ \frac{p}{q} & p \le \frac{1}{2} \le q \end{cases}$$

$$\Phi(1) = \mathbb{P}(\tau^{(1)} < \infty)$$

Ha $q \le \frac{1}{2} \le p$, akkor biztosan eléri a $k=1$-et (és minden $k \ge 1$-et) véges idő alatt

Ha $p < \frac{1}{2} < q$, akkor $\mathbb{P}(\text{sohasem éri el a } k=1\text{-et}) = \frac{q-p}{q}$!

- $\mathbb{E}\tau^{(1)} = \Phi'(1) = \dfrac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2qz^2\sqrt{1-4pqz^2}}$ ha $\Phi(1) = 1$

$$\mathbb{E}(\tau^{(1)}) = \frac{1}{p-q} \quad \text{ha} \quad q < \frac{1}{2} < p$$

$$= \infty \quad \text{ha} \quad p \le \frac{1}{2} \le q.$$

<u>Visszatérési idő</u>

$$\theta = \inf\{n \ge 1 \mid S_n = 0\}, \qquad \inf \emptyset = \infty$$

$$F(z) = \mathbb{E}(z^{\theta}) = p\,\mathbb{E}(z^{\theta} \mid \xi_1 = +1) + q\,\mathbb{E}(z^{\theta} \mid \xi_1 = -1)$$

$$= pz\,\frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz} + qz\,\frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2qz}$$

$$\boxed{F(z) = 1 - \sqrt{1-4pqz^2}} \qquad F(1) = 1 - |p-q|$$

- $F(1) = \mathbb{P}(\theta < \infty) = 1 - |p-q|$ — $\boxed{p=q=\frac{1}{2} \text{ rekurrens}}$ $\boxed{p \neq q \text{ tranziens}}$
- $p = q = \frac{1}{2}$ (szimmetrikus bolyongás) <u>rekurrens</u>

$$\Phi(z) = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}$$

$$F(z) = 1 - \sqrt{1-z^2}$$

$$\mathbb{P}(\theta < \infty) = \mathbb{P}(\tau^{(k)} < \infty) = 1$$

de $\quad \mathbb{E}\tau^{(1)} = \Phi'(1) = \infty \qquad \boxed{\%}$

$$\mathbb{E}\theta = F'(1) = \infty$$

Tranziens bolyongás <u>utolsó</u> visszatérése az origóba

$$q < \tfrac{1}{2} < p$$

$\nu = \#\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = 0\}$ geometriai eloszlású

$\mathbb{P}(\nu = k) = (2q)^k (1-2q) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

$\omega = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ utolsó visszatérés ideje nem eloszlás! $\sum_{n\geq 0} u_n \neq 1$

$u_n := \mathbb{P}(S_n = 0)$; $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k u_k$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f_k u_{n-k} + \delta_{n,0}$$

kov $U(z) = F(z)U(z) + 1$

$$U(z) = \frac{1}{1-F(z)}$$

astat $U(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}$

Másrészt $u_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 2m+1 \\ \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & \text{ha } n = 2m \end{cases}$

tehát $\sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} p^m q^m z^{2m} = \left(1-4pqz^2\right)^{-1/2}$

(12)

$$\omega = \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{\Theta}_j$$

$\tilde{\Theta}_j$ a j-edik $\boxed{\text{véges idejű}}$ visszatérés hossza
függetlenek

$$\mathbb{P}(\tilde{\Theta} = k) = \mathbb{P}(\Theta = k \mid \Theta < \infty) \quad !$$

$$\tilde{F}(z) := \mathbb{E}(z^{\tilde{\Theta}}) = \mathbb{E}(z^{\Theta} \mid \Theta < \infty) = \frac{F(z)}{F(1)}$$

$$\tilde{F}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2q}$$

$$L(z) = \mathbb{E}(z^{\omega}) = \mathbb{E}(\tilde{F}(z)^{\nu}) = \frac{1-2q}{1-2q\tilde{F}(z)}$$

véletlen tagszámú összegre vonatkozó tétel

$$\boxed{L(z) = \frac{1-2q}{\sqrt{1-4pqz^2}} = \frac{p-q}{\sqrt{1-4pqz^2}}} \qquad (q < \tfrac{1}{2} < p)$$

$\mathbb{N}$ - eloszlások (gyenge) konvergenciája

$p^{(n)}$ eloszlások sorozata $\left(p_k^{(n)} \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} = 1\right)$

p még egy eloszlás $\left(p_k \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1\right)$

$p^{(n)} \longrightarrow p$ ha $\forall k$ $p_k^{(n)} \longrightarrow p_k$, amint $n \to \infty$

Tétel $p^{(n)} \longrightarrow p$ akkor és csak akkor, ha bármely korlátos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$-re $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) p_k^{(n)} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f(k) p_k$

(Azaz: $\mathbb{E}(f(X^{(n)})) \longrightarrow \mathbb{E}(f(X))$, ahol $X^{(n)}$ ill. X eloszlása $p^{(n)}$ ill. p)

Biz. $\boxed{\Leftarrow}$ $f(k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = k_0 \\ 0 & \text{ha } k \neq k_0 \end{cases}$ választással

$p_{k_0}^{(n)} \longrightarrow p_{k_0}$ következik

$\boxed{\Rightarrow}$

Lemma (kompaktság / feszesség) ha $p^{(n)} \longrightarrow p$ (a fenti def. értelmében), akkor $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K < \infty$, úgy hogy $\forall n$-re $\sum_{k \geq K} p_k^{(n)} < \infty$.

(Hétköznapi nyelven: kompakt halmaz komplementerének valószínűsége egyenletesen kicsi).

Biz: ① L-t választjuk úgy, hogy $\sum_{k \geq L} p_k < \frac{\varepsilon}{2}$

② N-et választjuk úgy, hogy $n \geq N$-re $\max_{0 \leq k < L} |p_k^{(n)} - p_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$

Köv: $n \geq N$-re

$$\sum_{k \geq L} p_k^{(n)} = 1 - \sum_{k=0}^{L-1} p_k^{(n)} = \sum_{k \geq L} p_k + \sum_{k < L} (p_k - p_k^{(n)}) \leq$$

$$\leq \sum_{k \geq L} p_k + \sum_{k < L} |p_k^{(n)} - p_k| < \varepsilon.$$

③ M-et választjuk úgy, hogy $\max_{n \leq N} \sum_{k \geq M} p_k^{(n)} < \varepsilon$

$K = \max(L, M)$ QED (Lemma)

$\boxed{\Rightarrow \text{folyt}}$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} f(k) - \sum_{k=0}^{\infty} p_k f(k) \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{K} |p_k^{(n)} - p_k| \, |f(k)|}_{\downarrow \; 0, \text{ amint } n \to \infty} + \underbrace{\sup_k |f(k)| \sum_{k > K} (p_k^{(n)} + p_k)}_{\leq 2\|f\|_\infty \cdot \varepsilon}$$

QED (Tétel)

Példa: binomiális Poisson approximációja
$p_n \in (0,1)$: $n p_n \longrightarrow \lambda$, amint $n \to \infty$

$p_k^{(n)} = b(k; n, p_n)$; $p_k = p(k, \lambda)$
BIN(n, p_n) Poi(λ)

Gyakran könnyebb a generátor függvények (pontonkénti) konvergenciáját ellenőrizni.

$p_k^{(n)}$, p_k eloszlások $\mathbb{N}$-en

$P^{(n)}(z)$, $P(z)$ generátorfüggvényeik

Tétel

(1) $p^{(n)} \longrightarrow p \Rightarrow P^{(n)}(z) \longrightarrow P(z)$ egyenletesen $\{|z| \le 1\}$-ben

(2) ha $P^{(n)}(z) \longrightarrow P(z)$ pontonként $\{z < 1\}$, és $P(z)$ folytonos $z = 1$-ben, akkor $P(z)$ egy p_k eloszlás generátorfüggvénye és $p^{(n)} \longrightarrow p$.

Biz

(1) K, mint az előbbi Lemmában

$$\sup_{|z| \le 1} \left| P^{(n)}(z) - P(z) \right| \le \underbrace{\sum_{k=0}^{K} |p_k^{(n)} - p_k|}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k > K} \left(p_k^{(n)} + p_k\right)}_{\le 2\varepsilon}$$

(2) Vitali tétele

$D \subset \mathbb{C}$ öf nyílt tartomány $f^{(n)}: D \longrightarrow \mathbb{C}$ analitikusak és egyenletesen korlátosak $\overline{D}$ fn. ($\forall z \in D$) $f^{(n)}(z) \longrightarrow f(z)$ pontonként). Ekkor: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ is analitikus és a konvergencia egyenletes minden $\overline{D'} \subset D$-ben

elég egy torlódó részhalmazon

Általánosan $P^{(n)}$-re: $P: \{|z|<1\} \to \mathbb{C}$ analitikus

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad |z|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint z^{-(k+1)} P^{(n)}(z)\, dz$$

(egyenletes konv. miatt) $= \frac{1}{2\pi i} \oint z^{-(k+1)} P(z)\, dz = p_k$

Nyilván: $p_k \geq 0$ és $\sum_{k=0}^{\infty} p_k \leq 1$.

De: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = P(1-) = P(1) = 1$ QED

itt kell P folytonossága $z=1$-ben!!!

Tanulság: kell

P folytonosság $z=1$-ben

Comment: kompaktság / feszesség

Ellenpélda: $p_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & n < k \end{cases}$ $\qquad P^{(n)}(z) = \frac{1}{n+1} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

Példa: $B_{p,n}(z) = \left(1 - p(1-z)\right)^n \xrightarrow{\boxed{n\to\infty,\ p\to 0,\ np\to\lambda}} e^{-\lambda(1-z)} = P_\lambda(z)$

More later

Poisson approximáció általánosabban (nem homogén)

$n, \quad m_n \longrightarrow \infty$

$\alpha_i^{(n)} \quad i=1,2,\dots,m_n\,;\ 1>\alpha_i^{(n)}>0$

- $\max\{\alpha_i^{(n)} \mid i=1,2,\dots,m_n\} \longrightarrow 0,$ amint $n\to\infty$
- $\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^{(n)} \longrightarrow \lambda,$ amint $n\to\infty$

$\left(X_i^{n}\right)_{i=1}^{m_n}$ független $\quad \mathbb{P}(X_i^{(n)}=1)=\alpha_i^{(n)}$

$\mathbb{P}(X_i^{(n)}=0)=1-\alpha_i^{(n)}$

$Y_n=\sum_{i=1}^{m_n} X_i^{(n)}$; generátor függvénye

$P_n(z)=\mathbb{E}\left(z^{Y_n}\right)=\mathbb{E}\left(z^{\sum_{i=1}^{m_n} X_i^n}\right)=$

$\prod_{i=1}^{m_n}\mathbb{E}\left(z^{X_i^{(n)}}\right)=\prod_{i=1}^{M_n}\left((1-\alpha_i^{(n)})+z\alpha_i^{(n)}\right)$

$=\prod_{i=1}^{M_n}\left(1-(1-z)\alpha_i^{(n)}\right)$

$\longrightarrow e^{-\lambda(1-z)}$ Poisson

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás 12.

Nagy Számok Törvényei

Bernoulli NSzT:

S_n $BIN(p,n)$ eloszlású $P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

$\varepsilon>0$: $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n-np}{n}\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{2(pq+\varepsilon)}{n\varepsilon^2}\longrightarrow 0$$

amint $n\to\infty$

De: $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$, ahol X_j-k

független azonos eloszlásúak $\mathbb{P}(X_i=1)=p$
$\mathbb{P}(X_i=0)=q$
$\mathbb{E}X_i = p$

Célunk: általánosítani

$X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlásúak

$\mathbb{E}|X_i|<\infty$, $\mathbb{E}X_i = m \in \mathbb{R}$

Igaz-e, hogy $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)}{n}\right|>\varepsilon\right)\to 0$?

1) Markov egyenlőtlenség: (A.A. Markov 1856-1922)

Legyen $Y \geq 0$ val. változó

$\forall \lambda > 0$-ra $\quad \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$

Biz $\quad \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(X \cdot 1_{\{X \geq \lambda\}}) \geq \lambda \mathbb{E}(1_{\{X \geq \lambda\}}) = \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda)$ $\quad \boxed{\text{mert } X \geq 0}$ $\quad \square$

Következmények:

2) Csebisev egyenlőtlenség (P.L. Csebisev 1821-1894)

Legyen Y valós val. változó (megszorítás nélkül),

$\mathbb{E}Y^2 < \infty, \quad \mathbb{E}Y =: m, \quad \mathrm{Var}\, Y = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 =: \sigma^2$

$\mathbb{P}(|Y - m| \geq \lambda) \leq \dfrac{\sigma^2}{\lambda^2} \qquad \forall \lambda > 0$-ra

Biz Alk. Markov egyenlőtlenséget $Z = (Y-m)^2$-re $\quad \square$

3) Általánosított Markov.

$Y \in \mathbb{R}$ val. változó, $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ monoton $\uparrow$

$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}f(Y)}{f(\lambda)} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Biz Általánosítva a Markov-egyenlőtlenséget

$$Z = f(Y) - ra$$

④ Általánosított Csebisev:

Y val. változó $(\in \mathbb{R})$

$E|X| < \infty$, $EX =: m$

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton ↑

$$\mathbb{P}(|X-m| \geq \lambda) \leq \frac{E f(|X-m|)}{f(\lambda)} \quad ; \lambda \geq 0$$

Megjegyzés: ① Az egyenlőtlenség éles:

Pl. Csebisev élessége: $\lambda > 1$ rögzített

$$\mathbb{P}(X = \pm\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Követk.: Nagy Számok gyenge törvénye. (NSzGyT)

Tétel Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású (L^2) val. változók

$E(X_i) =: m$, $Var(X_i) =: \sigma^2 < \infty$

Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\left|n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Biz Csebisev $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ -re.

NSZT Coupon collectorra:

... durva ...

$$T_n = \tau_1^{(n)} + \tau_2^{(n)} + \cdots + \tau_n^{(n)}$$

$$\tau_k^{(n)} : 1 + GEO\left(p = \frac{n-k+1}{n}\right) \quad \text{függetlenek}$$

$$\mathbb{E}\left(\tau_k^{(n)}\right) = \frac{n}{n-k+1} \qquad \mathbb{D}^2\left(\tau_k^{(n)}\right) = \frac{n^2}{(n-k+1)^2}$$

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\tau_k^{(n)}\right) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n\log n + O(1)$$

$$\mathbb{D}^2(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}^2\left(\tau_k^{(n)}\right) = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = C \cdot n^2 + O(n)$$

$$\frac{\mathbb{D}(T_n)}{\mathbb{E}(T_n)} \longrightarrow 0 \quad :$$

~~$T_n / n\log n$~~

$$\boxed{\frac{T_n}{n\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1}$$

(4)

$$\mathbb{P}\left(|Y - \mathbb{E}Y| \geq n\varepsilon \right) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} \qquad \square$$

Megjegyzés: a második momentum feltétel gyengíthető

2) Feltételek általánosíthatóak: $X_1, X_2, \ldots$ L^2 valváltozók

$\forall\, i \neq j$: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq 0$, $\quad \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)}{n^2} = 0$

3) Széria sorozatok ...

4) Emlékeztető: Weierstrass approx. tételének Bernstein féle bizonyítására.

Miért GYENGE törvény?

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\qquad X_i$ független azonos eloszlásúak ugyanazon az Ω-n értelmezve

NSzT: $\left| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}X_i) \right|$ kicsi, nagy valószínűséggel

De konvergál-e 0-hoz, azaz $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{?} m$

Ez egy másik kérdés.

Valószínűségben való (gyenge) konvergencia és majdnem biztos / egy valószínűséggel való (erős) konvergencia:

Def. $\boxed{\text{v-st- konvergencia:}}$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ vsz változó sorozata

$Y_n \xrightarrow{P} 0$: ha: $\mathbb{P}(|Y_n| > \delta) \to 0 \quad \forall \delta > 0$

explicit módon $\mathbb{P}(\{\omega \mid |Y_n(\omega)| > \delta\}) \to 0 \quad \forall \delta > 0$

$\boxed{\text{m.b. konvergencia}}$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ val. változó sorozata

$Y_n \xrightarrow{m.b.} 0$ ha $\mathbb{P}(Y_n \to 0) = 1$

vagy $\mathbb{P}(Y_n \not\to 0) = 0$

explicitan:

$\mathbb{P}(\{\omega \mid (\forall r \in \mathbb{N}^+)(\exists n_0 = n_0(\omega, r)) : (\forall n \geq n_0) : |Y_n| < \frac{1}{r}\}) = 1$

vagy ekv.

$P(\{\omega \mid (\exists r \in \mathbb{N},\ n_1 < n_2 < \dots) : \forall j\ |Y_{n_j}| > \frac{1}{r}\}) = 0$

(6)

Állítás: m.b. konv erősebb, mint st konv, azaz

$$Y_n \xrightarrow{m.b.} 0 \implies Y_n \xrightarrow{st.} 0$$

Biz.

$$B_{n,r} = \{\omega \in \Omega \mid \forall m \geq n : |Y_m(\omega)| \leq \tfrac{1}{r}\}$$
$$= \bigcap_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \mid |Y_m(\omega)| \leq \tfrac{1}{r}\}$$

$$\overline{B}_{n,r} = \{\omega \in \Omega \mid \exists m \geq n \ |Y_m(\omega)| > \tfrac{1}{r}\}$$
$$= \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \mid |Y_m(\omega)| > 1/r\}$$

$$\forall n, r : \quad B_{n+1,r} \supseteq B_{n,r} \ ; \ B_{n,r+1} \subseteq B_{n,r}$$
$$\overline{B}_{n+1,r} \subseteq \overline{B}_{n,r} \ , \ \overline{B}_{n,r+1} \supseteq \overline{B}_{n,r}$$

$$Y_n \xrightarrow{m.b.} 0 \overset{\text{def}}{\iff} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{n,r}\Big) = 0$$
$$\iff (\forall r \in \mathbb{N}) : \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{n,r}\Big) = 0$$

monotone class $\iff (\forall r \in \mathbb{N}) : \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\overline{B}_{n,r}) = 0$

$$\implies (\forall r \in \mathbb{N}) : \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid |Y_n(\omega)| > \tfrac{1}{r}\}\big) = 0$$
$$\iff Y_n \xrightarrow{P} 0 \qquad \square$$

Borel Cantelli Lemma:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vsz. mező, $A_i \in \mathcal{A}$ $i = 1, 2, \dots$

megszámlálható sok esemény

$$B_j = \bigcup_{i=j}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \geq j : \omega \in A_i\}$$

$$B_j \supseteq B_{j+1}$$

$$B_\infty = \bigcap_j B_j = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_i \text{ végtelen sok } i\text{-re}\}$$

Tétel B-C lemma (E. Borel 1871-1956, F.P. Cantelli ...)

(i) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor $P(B_\infty) = 0$

(ii) Ha $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ -k függetlenek és $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, akkor $P(B_\infty) = 1$.

Biz.

(i) $\mathbb{P}(B_\infty) = \mathbb{P}(\bigcap_m B_m) \overset{\text{monoton sorozat}}{=} \lim_{m\to\infty} P(B_m) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq m} A_n) \leq$

$\leq \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) \longrightarrow 0$

ii) Belátjuk, hogy $\forall m$ $P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = 1$

$1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{M} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{M} \overline{A}_n) = \prod_{n=m}^{M} \mathbb{P}(\overline{A}_n) =$

$= \prod_{n=m}^{M} (1 - P(A_n)) \leq \exp\left(-\sum_{n=m}^{M} P(A_n)\right) \xrightarrow{M\to\infty} 0$ $\square$