Tóth Bálint:

VALÓSZÍNŰSÉG-
SZÁMÍTÁS II.

~~Tétel Független, korlátos vagy nemneg. valószínűségi változók szorzatának várható értéke a várható értékek szorzata:~~
~~$X, Y, \dots, Z \in L^1(\Omega, P)$ függetlenek~~
~~Ekkor $X \cdot Y \cdots Z \in L^1(\Omega, P)$ és~~
~~$\mathbb{E}(X \cdot Y \cdots Z) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y \cdots \mathbb{E}Z$~~

A konvolúció

Független valószínűségi változók összegének eloszlása: eloszlásfüggvények konvolúciója:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ val.mező, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ függetlenek

eloszlásuk: $F(x) = P(X < x)$
$G(y) = P(Y < y)$

legyen $Z := X + Y$, eloszlása $H(z) = P(Z < z)$

Fejezzük ki H-t (F és G)-vel.

$H(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) =$

rajz a túloldalon $= P\left(\bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ Y \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right), X < \frac{[2^m z] - (k+1)}{2^m} \right\}\right)$

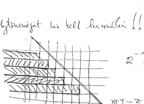
monoton class $= \lim_{m \to \infty} P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ Y \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right), X < \frac{[2^m z] - (k+1)}{2^m} \right\}\right)$

függetlenség $\lim_{m \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(Y \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)\right) P\left(X < \frac{[2^m z] - (k+1)}{2^m}\right)$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{[2^m z]-(k+1)}{2^m}\right)\left(G\left(\frac{k+1}{2^m}\right)-G\left(\frac{k}{2^m}\right)\right)$$

$$= \dots = \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)\, dG(y)$$

F balról folytonosságát ki kell használni !!



Konvolúció :

$$(F*G)(z) := \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)\, dG(y)$$

Tulajdonságok 1, $F*G = G*F$

2, $(F*G)*H = F*(G*H)$

3, legyen $E(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

[teljes tömeget a 0-ban koncentráló elfajult eloszlás]

$\forall F: \quad F*E = E*F = F.$

Ergo $\mathcal{E} = \{ F : \mathbb{R} \to [0,1] \mid F \text{ eloszlásfgv} \}$

$(\mathcal{E}, *)$ kommutatív félcsoport

E egységelemmel.

* Ha F, G absz. folyt, $F' = f$, $G' = g$, akkor $H = F * G$ is absz. folyt, $H' = h$, és

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(z-x)\, dx$$

Biz deriválunk az integrál alá

- A konvolúció simít: $H = F * G$ örökli F és G közül a simábbik (regulárisabb) simaságát. (Pl. H absz. folyt. ha F és G közül legalább az egyik absz. folyt., stb)

Biz deriválunk (ahányszor csak kell) az integrál alá.

Példák:

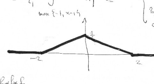
1, $E(-1,1)$ konvolúció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$f_2 = f * f$

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) f(x-y)\, dy = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}\{-1 < y < 1\} \cdot \mathbb{1}\{x-1 < y < x+1\}\, dy$$

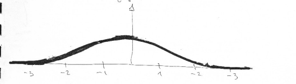
$$= \frac{1}{4} \int_{\max\{-1, x-1\}}^{\min\{1, x+1\}} dy = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & -2 \leq x < 0 \\ \frac{2-x}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$



$f_3 = f * f * f$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 3 \\ \frac{(3-|x|)^2}{16} & 1 \leq |x| \leq 3 \\ \frac{1-x^2}{8} & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Hf ellenőrizzük!



megj. ① ez már C^1; ② hasonlít a Normálisra

Hf Maple-el számoljuk és ábrázoljuk grafikusan f_k-t $k = 6$-ig

Számoljuk Maple-el f_4, f_5, f_6 -ot -és ábrázoljuk grafikusan $\tilde{f}_k(x) := \sqrt{k}\, f_k(\sqrt{k}\, x)$ -t

2, Normális eloszlások konvolúciói

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Állítás

$$f_{m_1,\sigma_1} * f_{m_2,\sigma_2} = f_{m_1+m_2,\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

Ftab. Két független normális eloszlású val. változó (X, Y) összege $(Z = X+Y)$ is normális eloszlású. És persze

statisztika

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{E} Z = \mathbb{E} X + \mathbb{E} Y \\ \operatorname{Var} Z = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y \end{array} \right|$$

Biz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{(x-y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dy =$$

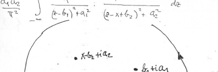
explicit számolás:
- változó cseré?
- Gauss integrál ...

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left\{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}$$

Cauchy eloszlás konvolúciója

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a_1}{a_1^2+(z-b_1)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a_2}{a_2^2+(x-z-b_2)^2}\,dz$$

$$= \frac{a_1a_2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-b_1)^2+a_1^2}\cdot\frac{1}{(z-x+b_2)^2+a_2^2}\,dz$$



$$= \frac{a_1a_2}{\pi^2}\oint\frac{1}{z-b_1-ia_1}\cdot\frac{1}{z-b_1+ia_1}\cdot\frac{1}{z-x+b_2+ia_2}\cdot\frac{1}{z-x+b_2+ia_2}\,dz$$

$$= 2\pi i\sum \mathrm{Res} = \frac{2a_1a_2i}{\pi}\left\{\frac{1}{2ia_1}\cdot\frac{1}{(b_1+b_2+ia_1-x)^2+a_2^2}+\frac{1}{2ia_2}\cdot\frac{1}{(b_1+b_2+ia_2-x)^2+a_1^2}\right.$$

$$= \frac{a_2}{\{[x-(b_1+b_2)]-i(a_1-a_2)\}\{[x-(b_1+b_2)]-i(a_1+a_2)\}}+$$

$$\frac{a_1}{\{[x-(b_1+b_2)]-i(a_1-a_2)\}\{[x-(b_1+b_2)]+i(a_1+a_2)\}}=$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(x-(b_1+b_2))-i(a_1-a_2)}\left\{\frac{a_2}{[x-(b_1+b_2)]-i(a_1+a_2)}+\frac{a_1}{(x-(b_1+b_2))+i(a_1+a_2)}\right\}$$

$$= \dots = \frac{1}{\pi}\;\frac{a_1+a_2}{[x-(b_1+b_2)]^2+(a_1+a_2)^2} = C(b_1+b_2,\,a_1+a_2)$$

Követk. Ha $X_1, X_2, \dots, X_n$ független $N(m_k, \sigma_k)$ eloszlásúak, akkor $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ eloszlása $N\left(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\right)$

Stabilitás

Cauchy eloszlások konvolúciója
Poisson — konvolúciója

%

3) Exponenciális eloszlások konvolúciója:

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \gamma_k = \underbrace{\gamma_1 * \dots * \gamma_1}_{k \text{ szoros konvolúció}}$$

$$\gamma_2(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-y)}\, dy$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x dy = \lambda^2 x \cdot e^{-\lambda x}$$

$$\gamma_3(x) = (\gamma_2 * f)(x) = \int_0^x \left(\lambda^2 y e^{-\lambda y}\right)\left(\lambda e^{-\lambda(x-y)}\right) dy$$

$$= \lambda^3 e^{-\lambda x} \int_0^x y\, dy = \frac{\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}}{2}$$

$$\boxed{\dots \quad \gamma_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}}$$

Biz: indukcióval.

n-ed rendű Γ eloszlás

(egymástól független expo. eloszlású valószínűségi idők összegének eloszlása)

Két hasznos megjegyzés:

(1) γ-eloszlás és Poisson eloszlás kapcsolata:

Állítás: $$\int_0^t \gamma_n(s)\,ds = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad n\geq 1$$

Biz. Elég $\lambda = 1$ re belátni

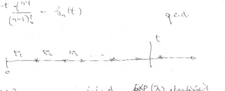
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}\right) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{t^k}{k!}\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\left(-e^{-t}\frac{t^k}{k!} + e^{-t}k\frac{t^{k-1}}{k!}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} -e^{-t}\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=n-1}^{\infty} e^{-t}\frac{t^k}{k!}$$

$$= e^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \gamma_n(t)$$

q.e.d.

Értelmezés



τ_j $j = 1, 2, \ldots$ i.i.d. EXP(λ) eloszlásúak

$\nu_t = \max\{k : \sum_{j=1}^{k} \tau_j < t\}$

akkor ν_t eloszlása POI(λt).

(2) De Moivre-tėtel CHT

τ_j i.i.d. $\text{EXP}(\lambda)$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} \tau_j$ $\quad \mathbb{E}(S_n) = n \cdot \lambda^{-1} = m_n$
$\quad \mathrm{Var}(S_n) = n \cdot \lambda^{-2} = \sigma_n^2$

$X_n := \frac{S_n - m_n}{\sigma_n}$ sűrűség függvénye

$$f_n(x) = \sigma_n \, g_n(m_n + \sigma_n x)$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \left(\frac{n}{\lambda} + \frac{\sqrt{n}}{\lambda} x\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{n}{\lambda} + \frac{\sqrt{n}}{\lambda} x\right)}$$
$$= \frac{n^{1/2}}{n!} \frac{n^n}{\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-n} e^{-\sqrt{n}\cdot x}$$

Stirling $\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}\cdot x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

$\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = n \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) =$

$$= n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-3/2}\right)\right)$$
$$= \sqrt{n}\, x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(n^{-1/2}\right)$$

[illegible]

Euler Γ függvénye:

$$\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\, du$$

az integrál konvergens (véges) $s>0$-ra!

Néhány alaptulajdonság:

$$\boxed{① \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty u^{\alpha} e^{-u}\, du = -u^{\alpha}e^{-u}\Big|_{u=0}^{u=0} + \int_0^\infty \alpha u^{\alpha-1} e^{-u}\, du$$

$$= s\Gamma(s) \checkmark$$

$$\boxed{② \quad \Gamma(1) = 0}$$

Köv: ha $\alpha = n \in \mathbb{N}$: $\boxed{③ \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$

$$④ \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{⑤ \quad \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

bizonyítás: később

Teljesülés $\alpha > 0$ paraméterrel

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} = \lambda \gamma_{\alpha,1}(\lambda x)$$

<u>Állítás</u>

$$\gamma_\alpha * \gamma_\beta = \gamma_{\alpha+\beta}$$

<u>Biz</u>

$$\int_0^\infty \gamma_\alpha(x-y)\,\gamma_\beta(y)\,dy =$$

$$\int_0^x \frac{(x-y)^{\alpha-1} e^{-(x-y)}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{y^{\beta-1} e^{-y}}{\Gamma(\beta)}\,dy =$$

$$\frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}\,dy =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \gamma_{\alpha+\beta}(x)$$

$\boxed{\text{Korlátlan oszthatóság}}$

4. χ^2 eloszlás §.

$X_1, X_2, \dots, X_n$: független $N(0,1)$ eloszlásúak

$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$

sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2}\gamma_{\frac{n}{2}}\left(\frac{x}{2}\right) =: h_n(x)$

$$\boxed{h_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t}\,dt \qquad p > 0$

$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \implies \Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(p)$ re érvényes a Stirling formula $\Gamma(p+1) \sim \sqrt{2\pi}\, p^{p+1/2} e^{-p}$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ stb

$a, b > 0 : \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} =: B(a,b)$

$h_n(x)$ bizonyítása indukcióval:

$n = 1 \quad h_1(x) = \frac{d}{dx} P(X^2 < x) = \frac{d}{dx}\left[\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})\right] =$

$= 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\gamma_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)$

$n \to n+1 : h_{n+1} = h_n * h_1$

$$h_{n+1}(x) = \int_0^{x} h_n(z)\, h_1(x-z)\, dz$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1} 2^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \int_0^{x} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \cdot (x-z)^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{(x-z)}{2}}\, dz$$

$$= 2^{-\frac{n+1}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}-1} \underbrace{\int_0^{1} t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt}_{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$$

$$= 2^{-\frac{n+1}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^{-1} x^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{QED.}$$

Pl. $n = 3$ $\qquad (v_1, v_2, v_3)$ független $N\left(0, \sqrt{\frac{kT}{m}}\right)$

$$\frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) = E_{kin} \qquad \chi_3^2 \text{ eloszlású}$$

L. Boltzmann

1

Tóth Bálint: Valószínűségszámítás (10)

Analitikus eszközök 1

A generátor függvény:

$$(a_k)_{k=0}^{\infty} \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

$A(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$, ha a sor abszt. konv.

(tegyük fel hogy absz konv. a $|z| < \rho$ körben)

$A(z)$ minden információt tartalmaz az $(a_k)_{k=0}^{n}$ sorozatról.

Rekonstrukció: $a_k = \frac{1}{k!} A^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{-(k+1)} A(z)\,dz$

Konvergencia sugár: $\rho = \left(\overline{\lim} |a_k|^{1/k}\right)^{-1}$

$\mathbb{N}$-értékű vszt. változók világa:

X $\mathbb{N}$-értékű vszt. változó $\mathbb{P}(X=k) = p_k$

generátor függvénye $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \mathbb{E}(z^X)$

konvergencia sugár: $\rho \geq 1$.

Példák: $BIN(p,n)$ $\qquad b_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,\dots,n$

$$B_{p,n}(z) = \left(1 - p(1-z)\right)^n \qquad \rho = \infty$$

②

GEO(p) $\quad g_p(k) = (1-p)^k p = q^k p \qquad k=0,1,\dots$

$$G_p(z) = \frac{p}{1-z(1-p)} = \frac{1-q}{1-qz} \qquad \boxed{\rho = \frac{1}{q}}$$

Poi(λ) $\quad p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k=0,1,\dots$

$$P_\lambda(z) = e^{-\lambda(1-z)} \qquad \boxed{\rho = \infty}$$

$\mathbb{N}$ eloszlások generátorfüggvényeinek alaptulajdonságai $z \in [0,1]$-en

$p_k \quad , \quad P(z) \quad$: • $P(1) = 1$
• $[0,1] \ni z \mapsto P(z)$ és $\forall$ deriváltja ≥ 0 (egyszerű)

Vigyázat: egy $z \mapsto P(z)$ függvényről nem mindig könnyű eldönteni, hogy eloszlásfüggvény generátorfüggvénye-e.

Momentumok: $\mathbb{E}X = P'(1)$, $Var(X) = P''(1) + P'(1)(1-P'(1))$

stb. $\quad P^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\, p_k$

<u>Egyszerű de hasznos tételek:</u>

① <u>Konvolúció generátora</u> = <u>generátorok szorzata</u>

$(a_k)_{k=0}^{\infty} \quad , \quad (b_k)_{k=0}^{\infty}$

$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k \qquad$ konv. sugara $\rho > 0$

$B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k b_k \qquad$ konv. sugara $\sigma > 0$

$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} =: (a * b)_k$

③

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k c_k \qquad \text{ahol sugara } \tau$$

Ekkor $\tau \geq \min(\rho, \bar{\rho})$ és $C(z) = A(z)B(z)$

Biz $$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \right) z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} (a_\ell z^\ell)(b_{k-\ell} z^{k-\ell})$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_\ell z^\ell)(b_m z^m) = A(z)B(z)$$

Valószínűségszámítási jelentése

X, Y független $\mathbb{N}$ értékű, $Z = X+Y$

$\mathbb{P}(X=k) = a_k$, $\mathbb{P}(Y=k) = b_k$; $\mathbb{P}(Z=k) = c_k$

Ekkor : $c_k = (a * b)_k$

$$C(z) = \mathbb{E}(z^Z) = \mathbb{E}(z^{X+Y}) = \mathbb{E}(z^X \cdot z^Y) \overset{\text{függetlenség}}{=}$$
$$\underset{\text{függetlenség}}{=} \mathbb{E}(z^X)\,\mathbb{E}(z^Y) = A(z)B(z)$$

(Lásd. pl. BIN, Poi)

$$\text{gener.}\ (\underbrace{a * a * \cdots * a}_{a^{*n}}) = A^n$$

(2) Eloszlások keverése:

- $X_1, X_2, \ldots$ $\mathbb{N}$-értékű val. változó

  eloszlásaik $p_{1,k}, p_{2,k}, \ldots$ $\mathbb{P}(X_i = k) = p_{i,k}$

- ν val. változó $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ értékű, független az (X_i)-ktől.

  Eloszlása $\mathbb{P}(\nu = n) = \alpha_n$ $n = 1, 2, \ldots$

- $Y = X_\nu$, azaz
  - "először" ν
  - "majd" kiválasztjuk a ν-edik X-et

Y eloszlása $\mathbb{P}(Y = k) = q_k = \sum \alpha_i p_{i,k}$

generátorfüggvénye: (teljes. val. tétele)

$$Q(z) = \sum_i \alpha_i P_i(z)$$

mert a generátorfüggvény lineárisan függ a sorozattól

$$a_\cdot \longmapsto A(\cdot) \quad \underline{\text{lineáris}}$$

3) <u>véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye</u>

- $X_1, X_2, \dots$ független, atomos eloszlásúak.

$$\mathbb{P}(X=k) = p_k, \qquad \mathbb{E}(z^X) = P(z)$$

- ν az X-ektől független val. változó

$$\mathbb{P}(\nu = n) = \alpha_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}(z^\nu) = A(z)$$

- $Y = \sum_{k=0}^{\nu} X_i$

<u>Ekkor</u> Y generátorfüggvénye $Q(z) = A(P(z))$

<u>Biz</u>
$$\mathbb{E}(z^Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(z^Y \mid \nu = n)\, \mathbb{P}(\nu = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) \mathbb{P}(\nu = n)$$

<u>X_i-k függetlensége</u>
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(z^{X_i})\, \mathbb{P}(\nu = n)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (P(z))^n\, \mathbb{P}(\nu = n)$$

$$= A(P(z)) \,. \qquad \text{QED}$$

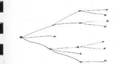
6

Néhány alkalmazás:

① Elágazó folyamatok (Branching processes)

p_k egy eloszlás $\mathbb{N}$-en ; $\sum_{n=0}^{\infty} z^k p_k = P(z)$

$m = \sum_{n=0}^{\infty} k p_k$, $\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} k^2 p_k - \left(\sum_{n=0}^{\infty} k p_k\right)^2 < \infty$



0 1 2 3 ... generációk

Az egyes egyedek (közvetlen) utódainak száma független és azonos p_k eloszlású

Y_n : az n-edik generációban élő egyedek száma

kérdések: Y_n aszimptotikus viselkedése $n \to \infty$ kor

• kihalnak-e? • túlélnek-e? • milyen gyorsan halnak ki (ha kihalnak)? • hogyan növekszik a populáció (ha túlélnek)?

~~Az (n-1)-edik egyedek leszármazottai~~