Tóth Bálint

Val. szám II. kieg.

1. Bernstein egyenlőtlenség

2. Cramér nagy eltérés tétel

Bernstein egyenlőtlenség – 1937

Szergej Natanovics Bernstein (1880–1968)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ függetlenek

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$M_n := \mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

$$D_n^2 := \mathbb{D}^2(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_k)$$

Tétel (Bernstein, 1937)

Ha $\mathbb{P}\left(|X_k - \mathbb{E}(X_k)| \leq K\right) = 1$

$k = 1, 2, \dots, n$, akkor

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \lambda \cdot D_n\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\left(1 + \frac{\lambda K}{2 D_n}\right)^2}\right\}$$

$0 \leq \lambda \leq \frac{D_n}{K}$ - ra $\lrcorner$

Bizonyítás ("turbo-Markov")

tfh. $\mathbb{E} X_k = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n$

$$P(S_n \geq \lambda D_n) = P\big(e^{\mu S_n} \geq e^{\mu \lambda D_n}\big) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E(e^{\mu S_n})}{e^{\mu \lambda D_n}} \qquad \boxed{\mu > 0}$$

$$P(S_n \geq \lambda D_n) \leq \inf_{\mu > 0} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{\mu X_k}) \cdot e^{-\mu \lambda D_n} \right\}$$

$$\mathbb{E}(e^{\mu X_k}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!} \mathbb{E}(X_k^r) =$$

$$= 1 + 0 + \frac{\mu^2}{2} \sigma_k^2 + \underbrace{\sum_{r=3}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!} \mathbb{E}(X_k^r)}_{\wedge \; \frac{\mu^2 \sigma_k^2}{2} \cdot \frac{\mu K}{3} \cdot \frac{(\mu K)^{r-3}}{(r-3)!}} \leq \cdots$$

$$\cdots \leq 1 + \frac{\mu^2 \sigma_k^2}{2} \left(1 + \frac{\mu K e^{\mu K}}{3} \right)$$

$$\leq \exp\left\{ \frac{\mu^2 \sigma_k^2}{2} \left(1 + \frac{\mu K e^{\mu K}}{3} \right) \right\}$$

Köv:

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda D_n\right) \leq \inf_{\mu > 0} \exp\left\{ \frac{\mu^2 D_n^2}{2}\left(1 + \frac{\mu K e^{\mu K}}{3}\right) - \mu \lambda D_n \right\} =$$

$$= \inf_{\mu > 0} \exp\left\{ \frac{\mu^2}{2}\left(1 + \frac{\mu \frac{K}{D_n} e^{\mu \frac{K}{D_n}}}{3}\right) - \mu\lambda \right\}$$

ügyesen kell μ-t megválasztani!

$$\mu \doteq \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{\lambda K}{2 D_n}\right)^2} < \lambda .$$

$$-\mu\lambda + \frac{\mu^2}{2}\left(1 + \frac{\mu \frac{K}{D_n} e^{\mu \frac{K}{D_n}}}{3}\right) =$$

$$-\frac{\lambda^2}{\left(1 + \frac{\lambda K}{2D_n}\right)^2} + \frac{\lambda^2}{2\left(1 + \frac{\lambda K}{2D_n}\right)^2} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{\mu K}{D_n} \frac{e^{\mu K / D_n}}{3}}{\left(1 + \frac{\lambda K}{2D_n}\right)^2}}_{\leq 1 \text{ ha } \frac{\lambda K}{D_n} \leq 1} \leq$$

$$- \frac{\lambda^2}{2\left(1 + \frac{\lambda K}{D_n}\right)^2}$$

Ergo:

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda D_n\right) \leq \exp - \frac{\lambda^2}{2\left(1 + \frac{\lambda K}{2D_n}\right)^2}$$

$\boxed{\text{ugyanez } -S_n\text{-re}}$

$\square$ QED

Általánosítás i.i.d. - re

$X_1, X_2, \dots, X_n$ i. i. d.

$\mathbb{D}^2(X_k) = \sigma^2$, $D_n = \sqrt{n}\cdot\sigma$

① Erdős korlát a standard fluktuáció tartományában

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right| \geq \lambda\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\left(1+\frac{\lambda K}{2\sigma\sqrt{n}}\right)^2}\right\}$$

$$\text{ha } n \geq \frac{\lambda^2 K^2}{\sigma^2}$$

②) Statisztikai alkalmazás:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \delta$$

ha ...

(5)

(3) Nagy eltérés becslés:

$$\lambda = t\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \quad ; \quad t < \frac{\sigma^2}{K}$$

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq tn\right) \leq$$

$$2\exp\left\{-n\frac{t^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{tK}{2\sigma^2}\right)^2}\right\}$$

Megjegyzés

1) Chernoff egyenlőtlenség (Herman Chernoff 1952)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek

$\mathbb{E}(X_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$

$|X_k| \leq 1$ m.b.

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \lambda D_n) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2+\varepsilon}\right)$$

ha $0 \leq \lambda \leq \lambda_0(\varepsilon) D_n$

$$\lambda_0(\varepsilon) = 2\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}} - 1\right)$$

Bernstein speciális esete

NAGY ELTÉRÉS TÉTEL:

Legyen ξ egy nem elfajult val. változó és

$$F(x) = \mathbf{P}\left(\xi < x\right) \tag{28}$$

az eloszlásfüggvénye. Értelmezzük a következő függvényeket:

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto Z(\lambda) = \mathbf{E}\left(e^{\lambda\xi}\right) \in (0, \infty] \tag{29}$$

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \hat{I}(\lambda) = \ln Z(\lambda) \in (-\infty, \infty] \tag{30}$$

$$\underline{\lambda} = \inf\{\, \lambda \in \mathbb{R} \,:\, Z(\lambda) < \infty \,\} \qquad \bar{\lambda} = \sup\{\, \lambda \in \mathbb{R} \,:\, Z(\lambda) < \infty \,\} \tag{31}$$

Feltesszük, hogy

$$\underline{\lambda} < 0 < \bar{\lambda} \tag{32}$$

Ez a feltevés a ξ val. változó momentumai növekedési sebességét korlátozza.

Állítás. $\hat{I}(\cdot)$ *tulajdonságai:* $(\underline{\lambda}, \bar{\lambda}) \ni \lambda \mapsto \hat{I}(\lambda) \in (-\infty, \infty)$

(1) végtelenszer differenciálható,

(2) szigorúan konvex.

Bizonyítás.

(1) Differenciálhatóság: ha $\underline{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$ akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$Z^{(n)}(\lambda) = \mathbf{E}\left(\xi^n e^{\lambda\xi}\right) < \infty \tag{33}$$

amiből $\hat{I}(\cdot)$ differenciálhatósága is egyenesen adódik.

(2) Konvexitás:

$$\hat{I}'(\lambda) = \frac{\mathbf{E}\left(\xi e^{\lambda\xi}\right)}{\mathbf{E}\left(e^{\lambda\xi}\right)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y e^{\lambda y} dF(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y)} = \mathbf{E}\left(\xi^{(\lambda)}\right) \tag{34}$$

$$\hat{I}''(\lambda) = \frac{\mathbf{E}\left(\xi^2 e^{\lambda\xi}\right)}{\mathbf{E}\left(e^{\lambda\xi}\right)} - \left(\frac{\mathbf{E}\left(\xi e^{\lambda\xi}\right)}{\mathbf{E}\left(e^{\lambda\xi}\right)}\right)^2 =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{\lambda y} dF(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y)} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y e^{\lambda y} dF(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y)}\right)^2 = \mathbf{D}^2\left(\xi^{(\lambda)}\right) > 0 \tag{35}$$

ahol $\xi^{(\lambda)}$ egy

$$\mathbf{P}\left(\xi^{(\lambda)} < x\right) = F_\lambda(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda y} dF(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y)} \tag{36}$$

eloszlásfüggvényű val. változó. □

Konvex konjugálás/Legendre transzformáció: Legyen $I : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ a következő képpen értelmezve:

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\lambda x - \hat{I}(\lambda)\right) \tag{37}$$

Mivel

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \hat{I}'(\lambda) = \inf\{\, x \in \operatorname{supp}(F) \,\} = \underline{x} \tag{38}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \hat{I}'(\lambda) = \sup\{\, x \in \operatorname{supp}(F) \,\} = \bar{x} \tag{39}$$

ha $x \in (\underline{x}, \bar{x})$, akkor a

$$\hat{I}'(\lambda) = x \tag{40}$$

egyenletnek *létezik egyetlen* $\lambda^*(x) \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ megoldása és

$$I(x) = x\lambda^*(x) - \hat{I}(\lambda^*(x)) \tag{41}$$

Állítás. *$I(\cdot)$ tulajdonságai:* $(\underline{x}, \bar{x}) \ni x \mapsto I(x) \in [0, \infty)$

(1) végtelenszer differenciálható,

(2) szigorúan konvex,

(3)

$$I(\mathbf{E}(\xi)) = 0 \tag{42}$$

(és természetesen $I(x) > 0$ minden $x \neq \mathbf{E}(\xi)$-re).

(4) $I(\cdot)$ alulról félig folytonos, következésképp:

$$I(\underline{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} I(\underline{x} + \varepsilon), \qquad I(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} I(\bar{x} - \varepsilon), \tag{43}$$

(5)

$$x \notin [\underline{x}, \bar{x}] - re: \; I(x) = \infty \tag{44}$$

 (8)

Bizonyítás.

(1) Differenciálhatóság: $I(\cdot)$ diffhatósága egyenesen következik $\hat{I}(\cdot)$ diffhatóságából.

(2) Konvexitás: (40)-(41)-ből

$$I'(x) = \lambda^*(x) + \Big(x - \hat{I}'(\lambda^*(x))\Big)\,\lambda^{*\prime}(x) = \lambda^*(x) \tag{45}$$

Még egy differenciálás után, (40)-t újból felhasználva,

$$I''(x) = \lambda^{*\prime}(x) = \Big(\hat{I}''(\lambda^*(x))\Big)^{-1} > 0 \tag{46}$$

(3) Világos, hogy

$$\lambda^*(\mathbf{E}(\xi)) = 0 \tag{47}$$

amiből, (41) útján (42) adódik.

(4) Az alulról félig folytonosság abból következik, hogy $I(\cdot)$ folytonos függvények családjának szuprémuma (def. alapján).

(5) a (37), (38) és (39)-ből következik. Harald Cramér (1893-1985) □

Tétel (NET, H. Cramér). ***Legyenek ξ_j i.i.d. val. változók, $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénnyel és (a,b) egy valós intervallum.***

$$-\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} \in (a,b)\Big) \to \inf_{a<x<b} I(x) \tag{48}$$

Megjegyzés: Kevésbé precíz, de szemléletesebb fogalmazás:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} \approx x\Big) = \exp\{-nI(x) + o(n)\} \tag{49}$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy

$$\mathbf{E}\Big(\xi\Big) = m < a < b \tag{50}$$

(1) *Felső becslés:* Legyen $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} \in (a,b)\Big) \le \mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} > a\Big) < e^{-\lambda a n}\Big(\mathbf{E}\Big(e^{\lambda\xi}\Big)\Big)^n = \exp\{-n(\lambda a - \hat{I}(\lambda))\} \tag{55}$$

9

(Markov egyenlőtlenséget használtuk $X = \exp\{\lambda(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)\}$ val. változóra, majd a $\hat{I}$ függvény értelmezését.) A fenti egyenlőtlenség minden $\lambda > 0$-ra igaz, következésképpen

$$\mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \in (a,b)\Big) \leq \exp\{-n \sup_{\lambda>0}(\lambda a - \hat{I}(\lambda))\} \tag{56}$$

Mivel $a > m$ esetén $\lambda^*(a) > 0$, azt kapjuk, hogy

$$\sup_{\lambda>0}(\lambda a - \hat{I}(\lambda)) = \sup_{\lambda\in\mathbb{P}}(\lambda a - \hat{I}(\lambda)) = I(a) \tag{57}$$

és végül

$$\mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \in (a,b)\Big) \leq \exp\{-nI(a)\} \tag{58}$$

(2) *Alsó becslés:* Legyen $y \in (a,b) \cap (\underline{x}, \bar{x})$, $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset (a,b)$ és $\lambda^* = \lambda^*(y)$. Legyenek $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$

$$\mathbf{P}\Big(\xi^* < x\Big) = F^*(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda^* z} dF(z)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda^* z} dF(z)} \tag{59}$$

eloszlású i.i.d val. változók. Ha F_n-el, illetve F_n^*-el jelöljük a $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, illetve $\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_n^*$ val. változók eloszlásfüggvényeit

$$F_n(x) = \mathbf{P}\Big(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n < x\Big), \qquad F_n^*(x) = \mathbf{P}\Big(\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_n^* < x\Big) \tag{60}$$

akkor

$$dF_n^*(x) = (Z(\lambda^*))^{-n} e^{\lambda^* x} dF_n(x), \qquad dF_n(x) = (Z(\lambda^*))^{n} e^{-\lambda^* x} dF_n^*(x) \tag{61}$$

Ezt használva a következő egyenlőtlenségsorozatot kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \in (a,b)\Big) \\
&\qquad \geq \mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)\Big) = \int_{n(y-\varepsilon)}^{n(y+\varepsilon)} dF_n(z) \\
&\qquad = (Z(\lambda^*))^n \int_{n(y-\varepsilon)}^{n(y+\varepsilon)} e^{-\lambda^* z} dF_n^*(z) \geq \Big(Z(\lambda^*) e^{-\lambda^*(y+\varepsilon)}\Big)^n \int_{n(y-\varepsilon)}^{n(y+\varepsilon)} dF_n^*(z) \\
&\qquad = \exp\{-n(I(y) + \varepsilon\lambda^*)\}\mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_n^*}{n} \in (a,b)\Big)
\end{aligned} \tag{62}$$

Mivel, a NSzT alapján

$$\mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_n^*}{n} \in (a,b)\Big) \to 1 \tag{63}$$

következik, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\Big(\frac{\xi_1^* + \xi_2^* + \cdots + \xi_n^*}{n} \in (a,b)\Big) \geq - \inf_{a<y<b} I(y) \tag{64}$$

□NET

H.F. (1) Számoljuk ki az $\hat{I}(\lambda)$ és $I(x)$ függvényeket a *normális*, *exponenciális*, *Bernoulli* és *Poisson* eloszlásokra.

(2) Ugyanezen eloszlásokra "bizonyítsunk naivul", azaz (49) alapján és a

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1)) \tag{65}$$

Stirling formula segítségével nagy eltérés tételt.