Kétkomponensű részecskerendszerek hiperbolikus hidrodinamikai limesze

Tóth Bálint

BME Matematika Intézet

2005. január 27.

1. Bevezetés

Fizikai környezetünk *mikroszkopikus szinten*, úgymond szemcses szerkezetű: apró komponensekből (molekulákból atomokból) áll, melyek időbeli fejlődését, dinamikáját elemi törvények (pl. a newtoni machanika törvényei vagy a kvantummechanika törvényei) vezérlik. Ilyen szinten való leírás 10^{26} nagyságrendű csatolt közönséges differenciálegyenlet megoldását feltételezi, ami egyrészt lehetetlen, másrészt tökéletesen fölösleges vállalkozás lenne. Ezzel szemben *makroszkopikus szinten* a fluidumok (légnemű és folyékony, tehát nem szilárd anyagok) dinamikáját néhány csatolt parciális differenciálegyenlet – az Euler egyenletek, vagy disszipatív hatásokat is figyelembe véve, a Navier-Stokes egyenletek – vezérlik. Az első és máig legfontosabb hidrodinamikai egyenletek Euler óta ismertek. Heurisztikus, fenomenológikus levezetésüket minden fizikus negyedéves koráig megtanulja. E differenciálegyenletek *matematikai jelentőségét* mi sem bizonyítja jobban, mint hogy a Navier-Stokes egyenletek pontos matematikai megértése egyike az egymillió dolláros Clay problémáknak.

A hidrodinamikai limeszek problémaköre e dichotómia matematikai feloldásának útja: a mikroszkopikus alapelvekből megfelelő tér-idő átskálázással a dinamika *megmaradó mennyiségeinek*, ú.m. részecskeszám, momentum, energia, lokális sűrűségeire vonatkozó parciális differenciálegyenlet-rendszerek levezetése.

Az alapgondolat a következő: mivel a megmaradó mennyiségek lokális sűrűsége sokkal lassabb ütemben változik (éppen a megmaradás miatt), mint a többi (makroszkopikus szinten irreleváns) változó, két időskála válik élesen szét. Míg a mikroszkopikus időskálán a sűrűségek lassan változnak, makroszkopikusan elenyészően kis tartományokban gyorsan kialakul a *lokális egyensúly.* Ennek a jelenségnek köszönhető a hidrodinamikai viselkedés: a megmaradó mennyiségek sűrűség mezőinek (makroszkopikus) időbeli változását egy autonom differenciálegyenlet-rendszer írja le.

Ennek a programnak a matematikailag szigorú megvalósítása roppant nehéz feladat. Komoly eredmények a '80-as évek közepe óta léteznek. A témakör úttörői a 80-as évek közepén többek között Roland L. Dobrusin, Fritz József, Hermann Rost voltak, majd a 80-as évek végétől az S.R.S. Varadhan, H.-T. Yau és a Courant Intézetben körülöttük kialakult kutatócsoport ért el lényeges eerdményeket. A problémakör matematikai alapjai ma már a [18], [10], [6] monográfiákból sajátítható el. Mindmáig csak sztochasztikus (tehát nem a valódi newtoni dinamika által vezérelt) rendszerekre léteznek eredmények.

A 2003. májusi MTA közgyűlés keretében tartott előadásomban két friss eredményt ismertettem az [9] és [22] munkák alapján.

2. Mikroszkopikus modellek

2.1. Állapottér, megmaradó mennyiségek

Jelöljük $\mathbb{T}^n$-nel a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ diszkrét tórusz és $\mathbb{T}$-vel az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (folytonos) tóruszt. Legyen Ω egy véges halmaz. Kölcsönható részecske rendszerünk állapottere

$$\Omega^n := \Omega^{\mathbb{T}^n}.$$

melynek elemeit $\underline{\omega} := (\omega_j)_{j\in\mathbb{T}^n}$-nel jelöljük. Egyszerűség kedvéért csak egész értékű megmaradó mennyiségeket tekintünk: legyen

$$\eta,\, \zeta : \Omega \to \mathbb{Z}.$$

Az $\eta_j := \eta(\omega_j)$, $\zeta_j := \zeta(\omega_j)$ egyszerüsített jelölést is használni fogjuk. Dinamikánk úgy lesz definiálva, hogy a $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\eta_j$ és $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\zeta_j$ mennyiségek *megmaradók.*

2.2. Ugrási ráták, infinitezimális generátor, stacionárius mértékek

Legyen π nem elfajult valószínűségi mérték Ω-n. Értelmezzük a

$$G(\tau,\theta) := \log \sum_{\omega\in\Omega} e^{\theta\eta(\omega)+\tau\zeta(\omega)}\pi(\omega), \qquad \tau,\theta\in\mathbb{R},$$

momentum generáló függvényt és a

$$\pi_{\theta,\tau}(\omega) := e^{\theta\eta(\omega)+\tau\zeta(\omega)-G(\tau,\theta)}\pi(\omega)$$

exponenciálisan torzított valószínűségi mérték családot Ω-n. Termodinamikai terminusban $G(\tau,\theta)$ *Gibbs féle szabadenergia* és $\pi_{\tau,\theta}$ *Gibbs mérték*. Az előforduló statisztikus fizikai fogalmakat és terminusokat ld. pl. [14]-ben.

Olyan mikroszkopikus dinamikát definiálunk az Ω^n állapottéren, amely megőrzi a $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\eta_j$ és $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\zeta_j$ mennyiségeket, más megmaradó mennyiséggel nem rendelkezik és amelyre a

$$\pi^n_{\tau,\theta} := \prod_{j\in\mathbb{T}^n}\pi_{\tau,\theta}$$

valószínűségi mértékek időben invariánsak.

Külön választjuk a dinamika teljesen aszimmetrikus- és szimmetrikus részét. Ezért két ugrási ráta függvényt éretelmezünk: $r : (S\times S)\times(S\times S)\to\mathbb{R}_+$, illetve, $s : (S\times S)\times(S\times S)\to\mathbb{R}_+$ rátákkal definiáljuk a dinamika teljesen aszimmetrikus, illetve, szimmetrikus komponensét. A dinamika $(\omega_j,\omega_{j+1}) \longrightarrow (\omega'_j,\omega'_{j+1})$ elemi ugrásainak rátája $\lambda r(\omega_j,\omega_{j+1};\omega'_j,\omega'_{j+1}) + \kappa s(\omega_j,\omega_{j+1};\omega'_j,\omega'_{j+1})$, ahol $\lambda,\kappa>0$ *sebesség* faktorok.

A ráta függvények a következő axiomáknak tesznek eleget:

(A) *Megmaradási törvények:* Ha $r(\omega_1,\omega_2;\omega'_1,\omega'_2) + s(\omega_1,\omega_2;\omega'_1,\omega'_2) > 0$, akkor

$$\begin{aligned}\eta(\omega_1)+\eta(\omega_2) &= \eta(\omega'_1)+\eta(\omega'_2),\\ \zeta(\omega_1)+\zeta(\omega_2) &= \zeta(\omega'_1)+\zeta(\omega'_2).\end{aligned}$$

(B) *Irreducibilitás:* Bármely $K\in[n\min\eta, n\max\eta]\cap\mathbb{Z}$ és $L\in[n\min\zeta, n\max\zeta]\cap\mathbb{Z}$ mellett

$$\Omega^n_{K,L} := \left\{\underline{\omega}\in\Omega^n : \sum_{j\in\mathbb{T}^n}\eta_j = K, \sum_{j\in\mathbb{T}^n}\zeta_j = L\right\}$$

a dinamika irreducibilis komponense. Azaz: bármely két $\underline{\omega}',\underline{\omega}''\in\Omega^n_{K,L}$ összeköthető pozitív rátájú ugrásokkal.

(C) *Az aszimmetrikus rész stacionaritása:*

(C1) Bármely $\omega_1, \omega_2, \omega_1', \omega_2' \in \Omega$-ra

$$\pi(\omega_1)\pi(\omega_2)r(\omega_1, \omega_2; \omega_1', \omega_2') = \pi(\omega_2')\pi(\omega_1')r(\omega_2', \omega_1'; \omega_2, \omega_1)$$

(C2) Bármely $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$-ra

$$R(\omega_1, \omega_2) + R(\omega_2, \omega_3) + R(\omega_3, \omega_1) = \\ R(\omega_3, \omega_2) + R(\omega_2, \omega_1) + R(\omega_1, \omega_3),$$

ahol

$$R(\omega_1, \omega_2) := \sum_{\omega_1', \omega_2' \in \Omega} r(\omega_1, \omega_2; \omega_1', \omega_2').$$

(D) *A szimmetrikus rész reverzibilitása:*

(D1) Bármely $\omega_1, \omega_2, \omega_1', \omega_2' \in \Omega$-ra

$$\pi(\omega_1)\pi(\omega_2)s(\omega_1, \omega_2; \omega_1', \omega_2') = \pi(\omega_2')\pi(\omega_1')s(\omega_2', \omega_1'; \omega_2, \omega_2).$$

(D2) Bármely $\omega_1, \omega_2, \omega_1', \omega_2' \in \Omega$-ra

$$s(\omega_1, \omega_2; \omega_1', \omega_2') = s(\omega_2, \omega_1; \omega_2', \omega_1')$$

Az infinitezimális generátor precíz értelmezéséhez előszöris értelmezzük a minden $\omega', \omega'' \in \Omega$ és $j \in \mathbb{T}^n$ mellett a $\Theta_j^{\omega'\omega''} : \Omega^n \to \Omega^n$ leképezéseket a következő képpen:

$$\left(\Theta_j^{\omega'\omega''}\underline{\omega}\right)_i = \begin{cases} \omega' & \text{if} \quad i = j \\ \omega'' & \text{if} \quad i = j+1 \\ \omega_i & \text{if} \quad i \neq j, j+1. \end{cases}$$

Értelmezzük az alábbi aszimmetrikus, illetve, a szimmetrikus infinitezimális generátort:

$$L^n f(\underline{\omega}) = \sum_{j \in \mathbb{T}^n} \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega} r(\omega_j, \omega_{j+1}; \omega', \omega'')\big(f(\Theta_j^{\omega'\omega''}\underline{\omega}) - f(\underline{\omega})\big),$$

illetve,

$$K^n f(\underline{\omega}) = \sum_{j \in \mathbb{T}^n} \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega} s(\omega_j, \omega_{j+1}; \omega', \omega'')\big(f(\Theta_j^{\omega'\omega''}\underline{\omega}) - f(\underline{\omega})\big).$$

Ezentúl $\mathcal{X}_t^n$-vel jelöljük az Ω^n állapottéren

$$G^n := nL^n + n^2\sigma(n)K^n \tag{1}$$

infinitezimális generátor által meghatározott Markov folyamatot. Itt $\sigma(n)$ a *makroszkopikus viszkozitás*t jelöli. A priori feltesszïk, hogy a $\sigma(n) \ll 1$.

Megjegyzések:

(1) Az (A) és (B) feltételek biztosítják, hogy $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\eta_j$ és $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\zeta_j$ valóban megmaradó mennyiségek és a dinamika más megmaradó mennyiségekkel nem rendelkezik.

(2) A (C) feltételekből következik, hogy a $\pi^n_{\tau,\theta}$ szorzat mértékek az L^n infinitezimális generátor által meghatározott aszimmetrikus dinamika stacionárius mértékei. Ennek bizonyítása a [1], [3], [15], [22] dolgozatok módszereivel történik. Figyeljünk az ω_1, ω_2 és ω_1', ω_2' sorrendjére a (C1) feltétel bal- és jobboldalán: ez *nem* részletes egyensúlyi (azaz reverzibilitási) feltétel.

(3) A (D) feltétel következtében a K^n infinitezimális generátor által meghatározott szimmetrikus dinamika reverzibilis a $\pi^n_{\tau,\theta}$ szorzatmértékre.

A $\pi^n_{\tau,\theta}$ szorzatmértékeket *kanonikus mértékek*nek fogjuk nevezni. Mivel a $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\eta_j$ és $\sum_{j\in\mathbb{T}^n}\zeta_j$ mennyiségeket megtartja a dinamika, e mértékek stacionáriusak de nem lehetnek ergodikusak. Értelmezzük $\Omega^n_{K,L}$-en az alábbi *feltételes* eloszlásokat

$$\pi^n_{K,L}(\underline{\omega}) := \pi^n_{\tau,\theta}\big(\underline{\omega}\,\big|\,\sum_j \eta_j = K,\ \sum_j \zeta_j = L\big) = 1\!\!1\{\underline{\omega}\in\Omega^n_{K,L}\}\frac{\pi^n_{\tau,\theta}(\underline{\omega})}{\pi^n_{\tau,\theta}(\Omega^n_{K,L})}$$

A (B) irreducibilitási feltétel következtében a $\pi^n_{K,L}(\underline{\omega})$ *mikrokanonikus* eloszlások a dinamika ergodikus mértékei.

2.3. Várható értékek

A $\pi^n_{\tau,\theta}$ kanonikus mértékek szerinti várható értéket, szórásnégyzetet és kovarianciát jelöljük rendre $\mathbf{E}_{\tau,\theta}(\dots)$, $\mathbf{Var}_{\tau,\theta}(\dots)$, $\mathbf{Cov}_{\tau,\theta}(\dots)$-val.

A megmaradó mennyiségek várható értékei, mint (τ,θ) függvényei

$$\begin{aligned} v(\tau,\theta) &:= \mathbf{E}_{\tau,\theta}(\eta) = \sum_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)\pi_{\tau,\theta}(\omega) = G_\tau(\tau,\theta), \\ u(\tau,\theta) &:= \mathbf{E}_{\tau,\theta}(\zeta) = \sum_{\omega\in\Omega}\zeta(\omega)\pi_{\tau,\theta}(\omega) = G_\theta(\tau,\theta), \end{aligned}$$

Elemi számolás alapján belátható, hogy

$$\begin{pmatrix} v_\tau & v_\theta \\ u_\tau & u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{\tau\tau} & G_{\tau\theta} \\ G_{\theta\tau} & G_{\theta\theta} \end{pmatrix} =: G''(\theta, \tau)$$

pontosan a $\mathbf{Cov}_{\tau,\theta}(\eta, \zeta)$ kovariancia mátrixszal egyenlő, ami szigorúan pozitív definit. Következik ebből, hogy a $(\tau, \theta) \mapsto (v(\tau, \theta), u(\tau, \theta))$ leképezés *invertálható*. Jelöljük az inverz leképezést a következő képpen: $(v, u) \mapsto (\tau(v, u), \theta(v, u))$.

Legyen $(v, u) \mapsto S(v, u)$ a szigorúan konvex $(\tau, \theta) \mapsto G(\tau, \theta)$ leképezés konvex konjugáltja (Legendre transzformáltja):

$$S(v, u) := \sup_{\tau,\theta} \big(v\tau + u\theta - G(\tau, \theta)\big), \tag{2}$$

és

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \{(v, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : S(v, u) < \infty\} \\ &= \mathrm{co}\{(\eta, \zeta) : \pi(\omega) > 0\}, \end{aligned}$$

ahol $\mathrm{co}\{A\}$ az $A \in \mathbb{R}^2$ halmaz konvex burkát jelöli. A $\mathcal{D}$ tartományban a következő inverziós formulák érvényesek:

$$\tau(v, u) = S_v(v, u), \qquad \theta(v, u) = S_u(v, u).$$

Valószínűségi terminusban $S(v, u)$ az $(\sum_j \eta_j, \sum_j \zeta_j)$ összegek együttes nagy eltéréseinek ráta függvénye. Termodinamikai terminusban $S(v, u)$ az egyensúlyi termodinamikai entrópiának felel meg.

Legyen

$$\begin{pmatrix} \tau_v & \tau_u \\ \theta_v & \theta_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{vv} & S_{vu} \\ S_{uv} & S_{uu} \end{pmatrix} =: S''(v, u).$$

Nyilvánvaló, hogy a $G''(\tau, \theta)$ és $S''(v, u)$ 2×2-es mátrixok pozitív definitek és egymás inverzei:

$$G''(\tau, \theta) S''(v, u) = I = S''(v, u) G''(\tau, \theta),$$

ahol $(\tau, \theta) = (\tau(v, u), \theta(v, u))$ vagy $(v, u) = (v(\tau, \theta), u(\tau, \theta))$ értendő. Kis lazasággal (ami nem okozhat konfúziót) a következő jelölést fogjuk használni: $\pi_{\tau(v,u),\theta(v,u)} =: \pi_{v,u}$, $\pi^n_{\tau(v,u),\theta(v,u)} =: \pi^n_{v,u}$, $\mathbf{E}_{\tau(v,u),\theta(v,u)} =: \mathbf{E}_{v,u}$, stb.

A következő általános jelölési konvencióval fogunk élni: ha $\delta : \Omega^m \to \mathbb{R}$ egy lokális változó (azaz: δ és m rögzített, amint $n \to \infty$), akkor a $\pi^m_{v,u}$ kanonikus eloszlás szerinti várható értékét a megfelelő nagy görög betűvel jelöljük:

$$\Delta(v,u) := \mathbf{E}_{v,u}(\delta) = \sum_{\omega_1,\dots,\omega_m\in\Omega^m} \delta(\omega_1,\dots,\omega_m)\pi_{v,u}(\omega_1)\cdots\pi_{v,u}(\omega_m).$$

2.4. Fluxusok

Bevezetjük a megmaradó mennyiségek mikroszkopikus fluxusait. Az L^n és K^n infinitezimális generátorok a következő képpen hatnak az η_i és ζ_i változókra:

$$\begin{aligned}
L^n\eta_i = &\ -\psi(\omega_i,\omega_{i+1}) + \psi(\omega_{i-1},\omega_i) &&=: -\psi_i + \psi_{i-1},\\
L^n\zeta_i = &\ -\phi(\omega_i,\omega_{i+1}) + \phi(\omega_{i-1},\omega_i) &&=: -\phi_i + \phi_{i-1},\\
K^n\eta_i = &\ -\psi^s(\omega_i,\omega_{i+1}) + \psi^s(\omega_{i-1},\omega_i) &&=: -\psi^s_i + \psi^s_{i-1},\\
K^n\zeta_i = &\ -\phi^s(\omega_i,\omega_{i+1}) + \phi^s(\omega_{i-1},\omega_i) &&=: -\phi^s_i + \phi^s_{i-1},
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\psi(\omega_1,\omega_2) &:= \sum_{\omega_1',\omega_2'\in\Omega} r(\omega_1,\omega_2;\omega_1',\omega_2')\big(\eta(\omega_2')-\eta(\omega_2)\big)\\
\phi(\omega_1,\omega_2) &:= \sum_{\omega_1',\omega_2'\in\Omega} r(\omega_1,\omega_2;\omega_1',\omega_2')\big(\zeta(\omega_2')-\zeta(\omega_2)\big)\\
\psi^s(\omega_1,\omega_2) &:= \sum_{\omega_1',\omega_2'\in\Omega} s(\omega_1,\omega_2;\omega_1',\omega_2')\big(\eta(\omega_2')-\eta(\omega_2)\big)\\
\phi^s(\omega_1,\omega_2) &:= \sum_{\omega_1',\omega_2'\in\Omega} s(\omega_1,\omega_2;\omega_1',\omega_2')\big(\zeta(\omega_2')-\zeta(\omega_2)\big).
\end{aligned}$$

A *makroszkopikus fluxusok* a következők:

$$\begin{aligned}
\Psi(v,u) &:= \mathbf{E}_{v,u}(\psi)\\
&= \sum_{\substack{\omega_1,\omega_2,\\ \omega_1',\omega_2'\in\Omega}} r(\omega_1,\omega_2;\omega_1',\omega_2')\big(\eta(\omega_2')-\eta(\omega_2)\big)\pi_{v,u}(\omega_1)\pi_{v,u}(\omega_2),\\
\Phi(u,v) &:= \mathbf{E}_{v,u}(\phi)\\
&= \sum_{\substack{\omega_1,\omega_2,\\ \omega_1',\omega_2'\in\Omega}} r(\omega_1,\omega_2;\omega_1',\omega_2')\big(\zeta(\omega_2')-\zeta(\omega_2)\big)\pi_{v,u}(\omega_1)\pi_{v,u}(\omega_2).
\end{aligned}$$

Ezek sima, reguláris függvényei a $(v, u) \in \mathcal{D}$ változóknak. A K^n infinitezimális generátor reverzibilitása miatt bármely $(v, u) \in \mathcal{D}$ mellett

$$\mathbf{E}_{v,u}(\psi^s) = 0 = \mathbf{E}_{v,u}(\phi^s).$$

3. Hidrodinamikai limesz

3.1. Az Euler egyenlet

Tömörség kedvéért a következő *vektoriális jelölést* fogjuk használni:

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{D}, \quad \boldsymbol{\Phi} := \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2,$$

$$\nabla := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial v \partial u} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial v \partial u} & \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

Az explicit módon kiírt és a tömör, vektoriális jelölést olykor felváltva használjuk.

Adott $\mathbb{T} \ni x \mapsto \boldsymbol{u}_0(x) \in \mathcal{D}$ kezdeti feltétellel tekintsük a következő Cauchy problémát

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \partial_x \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}(0, x) = \boldsymbol{u}_0(x). \tag{4}$$

A (3) parciális differenciálegyenlet-rendszert a problémánk *Euler egyenletének* nevezzük. A (3) rendszer *hiperbolikus megmaradási törvények rendszere.* A hiperbolikusság a 4. fejezetbeli 1. Tételből következik. A hiperbolikus megmaradási törvények közismerten nagyon nehezen kezelhető parciális differenciálegyenletek. ezekre vonatkozó elmélet a [2], [4], [17] monográfiákban található meg. Tény az, hogy bármilyen sima $\boldsymbol{u}_0$ kezdeti feltételből is indítjuk a rendszert, léteznek $0 < T_1 < T_2 < \infty$ időpontok, úgy, hogy

(1) $t \in [0, T_1)$ időintervallumban a (3)+(4) Cauchy problémának klasszikus, sima megoldása van,

(2) $t > T_2$-re a problémának nincsen folytonos megoldása: szakadások, úgynevezett *lökéshullámok* alakulnak ki. Ekkor a (3) parciális differenciálegyenlet-rendszer klasszikusan nem értelmezhető.

Gyenge, disztribució értelemben vett megoldásokat kell tekinteni: a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \ni (t,x) \mapsto \boldsymbol{u}(t,x) \in \mathcal{D}$ függvényt, mely rögzített $t \in \mathbb{R}_+$ mellett x-*ben korlátos változású*, a (3) rendszer *gyenge megoldásának* nevezzük, ha bármely $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ kompakt tartójú teszt-függvény esetén

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{T}} \left(\partial_t \boldsymbol{\varphi}(t,x) \cdot \boldsymbol{u}(t,x) + \partial_x \boldsymbol{\varphi}(t,x) \cdot \boldsymbol{u}(t,x) \right) dx\, dt \\ + \int_{\mathbb{T}} \boldsymbol{\varphi}(0,x) \cdot \boldsymbol{u}_0(x)\, dx = 0$$

Gyenge megoldások bevezetésével viszont elszabadul a pokol: rengeteg fizikailag értelmetlen, instabil gyenge megoldást engedünk meg. A fizikailag is értelmezhető stabil megoldás(ok) kiválasztására P. Lax *entrópia* kritériuma szolgál.

Az (3) parciális differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó Lax féle entrópia/fluxus pár egy $S, F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ függvény pár, ha a következő lineáris hiperbolikus parcialis differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\nabla F = \nabla S \cdot \nabla \boldsymbol{\Phi}.$$

Vagy, még egy differenciálással az F függvényt eliminálva,

$$\Psi_u S_{vv} + \big(\Phi_u - \Psi_v\big) S_{vu} - \Phi_v S_{uu} = 0. \tag{5}$$

Az (S,F) entrópia/fluxus párt konvexnek nevezzük, ha a $\mathcal{D} \ni \boldsymbol{u} \mapsto S(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}$ leképezés konvex. A $(t,x) \mapsto \boldsymbol{u}(t,x) \in \mathcal{D}$ a (3) rendszer *entrópia megoldása*, ha bármely konvex Lax entrópia/fluxus pár esetén

$$\partial_t S(\boldsymbol{u}) + \partial_x F(\boldsymbol{u}) \leq 0 \tag{6}$$

disztribúció értelemben. Azaz, bármely $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójú teszt-függvény esetén

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{T}} \left(\partial_t \varphi(t,x) S(\boldsymbol{u}(t,x)) + \partial_x \varphi(t,x) F(\boldsymbol{u}(t,x)) \right) dx\, dt \\ + \int_{\mathbb{T}} \varphi(0,x) S(\boldsymbol{u}(0,x))\, dx \geq 0$$

Könnyen belátható, hogy minden entrópia megoldás egyben gyenge megoldás is és hogy klasszikus (sima) megoldás esetén (6)-ban egyenlőség áll fenn. A fizikailag is értelmes, stabil gyenge megoldások a Lax féle entrópia megoldások.

A (3)+(4) Cauchy probléma entrópia megoldása(i)nak *egzisztenciája* lényegében megoldott: eléggé általános feltételek mellett biztosított az enrópia megoldás(ok) létezése. Ld. R. DiPerna elméletét [5]-ban és az említett monográfiákban. Az entrópia megoldás *unicitásának* problémája viszont (kettő- vagy több komponensből álló (3) rendszerek esetén) lényegében nyitott: extra regularitási feltételek mellett léteznek unicitási tételek (ld. [2]), de általánosságban nem. Bizonyára ez a kérdés jelenleg a hiperbolikus megmaradási törvények elméletének leglényegesebb nyitott kérdése.

3.2. Blokk átlagok és a hidrodinamikai limesz

Választunk egy $l = l(n)$ *mezoszkopikus* blokk méretet. A priori feltesszük, hogy

$$1 \ll l(n) \ll n, \tag{7}$$

de később ennél erősebb megszorításaink lesznek. Rögzítünk egy $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ átlagoló súlyfüggvényt, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
– Kompakt tartójú. Általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy a súlyfüggvény tartója a $[-1, 1]$ intervallum.
– A teljes súlya $\int a(x)\,dx = 1$.
– Páros: $a(-x) = a(x)$.
– Kétszer folytonosan differenciálható.

Adott ξ_i lokális változó blokk átlagát az x *makroszkopikus helykoordinátában* az alábbiak szerint értelmezzük:

$$\widehat{\xi}^n(x) = \widehat{\xi}^n(\underline{\omega}, x) := \frac{1}{l}\sum_j a\left(\frac{nx - j}{l}\right)\xi_j.$$

Mivel $l = l(n)$, a blokk mérettől való függést nem jelöljük explicit módon.

Legyen továbbá

$$\widehat{\xi}^n(t, x) := \widehat{\xi}^n(\mathcal{X}^n_t, x).$$

Ez a ξ_i lokális változó *empirikus blokk átlagainak folyamata.*

A fentebb bevezetett tömör vektoriális jelöléssel összhangban

$$\boldsymbol{\zeta}_j := \begin{pmatrix} \eta_j \\ \zeta_j \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\phi}_j := \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix}, \ \widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n(x) := \begin{pmatrix} \widehat{\eta}^n(x) \\ \widehat{\zeta}^n(x) \end{pmatrix}, \ \widehat{\boldsymbol{\phi}}^n(x) := \begin{pmatrix} \widehat{\psi}^n(x) \\ \widehat{\phi}^n(x) \end{pmatrix},$$

stb. Tehát $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n(t,x)$ a megmaradó mennyiségek empirikus blokk átlagainak folyamata. Ezt $L^1_{t,x} := L^1([0,T] \times \mathbb{T})$ véletlen elemeként fogjuk tekinteni. (Természetesen, L^1 helyett bármely L^p, $1 \leq p < \infty$, függvényteret is választhatnánk.) Jelöljük $\mathbb{P}^n$-nel a $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n(t,x)$ empirikus blokk-átlag folyamat eloszlását $L^1_{t,x}$-ben:

$$\mathbb{P}^n(A) := \mathbf{P}\left(\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n \in A\right), \tag{8}$$

ahol $A \in L^1_{t,x}$ az erős (norma) topológia szerint mérhető. A $\mathbb{P}^n$ eloszlás sorozat feszességét és részsorozatainak gyenge konvergenciáját az $L^1_{t,x}$ tér erős (norma) topológiája szerint értjük a későbbiekben és ez utóbbit $\mathbb{P}^{n'} \Rightarrow \mathbb{P}$-ként jelöljük.

A hidrodinamikai limesz érvényessége azt jelenti, hogy a megmaradó mennyiségek empirikus blokk-átlagainak $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n(t,x)$ folyamata *valamilyen értelemben* konvergál a (3)+(4) Cauchy probléma $\boldsymbol{u}(t,x)$ entrópia megoldása(i)hoz. E konvergencia pontos megfogalmazását a következő fejezet tételei tartalmazzák. Az entrópia megoldás unicitása esetén

$$\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n - \boldsymbol{u}\|_{L^1_{t,x}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \tag{9}$$

várható el. Unicitás híjján természetesen ennél kevesebb mondható.

4. Két eredmény

4.1. Hidrodinamikai limesz a sima megoldások tartományában

Tekintsünk egy kölcsönható részecskerendszert, mely megfelel az 2. fejezetben lefektetett axiómáknak és melynek G^n generátorát a (1)-ban értelmeztük.

Előszöris egy állítás következik a makroszkopikus fluxusokról, azaz a (3) Euler egyenletrendszerről.

1. Tétel. *Az 2. fejezetbeli (A), (B), (C) és (D) feltételekből következik az alábbi három, egymással ekvivalens állítás:*

(i) A Ψ és Φ makroszkopikus fluxusok kielégítik az alábbi Onsager-féle reciprociási relációkat

$$\Phi(\boldsymbol{u}(\tau,\theta))_\tau = \Psi(\boldsymbol{u}(\tau,\theta))_\theta. \tag{10}$$

(ii) A (2)*-ben definiált* $S(v,u)$ *egyensúlyi termodinamikai entrópia a* (3) *Euler egyenlet* $\mathcal{D}$*-ben globálisan szigorúan konvex Lax-entrópiája, azaz az* (5) *parciális differenciálegyenlet megoldása.*
(iii) Bármely $(v,u)\in\mathcal{D}$ *mellett*

$$\Psi_u(v,u)\mathbf{Var}_{v,u}(\zeta) - \Phi_u(v,u)\mathbf{Cov}_{v,u}(\eta,\zeta) = \tag{11}$$
$$\Phi_v(v,u)\mathbf{Var}_{v,u}(\eta) - \Psi_v(v,u)\mathbf{Cov}_{v,u}(\eta,\zeta).$$

Az Onsager-féle reciprocitási relációk klasszikus alakjait ld. [14]-ben. Vegyük észre, hogy (11)-ből közvetlenül következik, hogy $\mathcal{D}$-ben

$$\big(\Phi_u - \Psi_v\big)^2 + 4\Phi_v\Psi_u \geq 0,$$

azaz a (3) rendszer valóban (legalábbis gyengén) hiperbolikus.

Most rátérünk a hidrodinamikai limesz tárgyalására. A $\sigma(n)$ makroszkopikus viszkozitás a minimális

$$0 \leq \sigma(n) \ll 1 \tag{12}$$

feltételnek tesz eleget. Legyen a (4)-beli kezdeti feltétel sima és $[0,T]\times\mathbb{T}\ni(t,x)\mapsto\boldsymbol{u}(t,x)\in\mathcal{D}$ a (3)+(4) Cauchy probléma *klasszikus, sima* megoldása. Emlékezzünk: a sima tartományban unicitás is van. Legyen μ_t^n, $t\in[0,T]$, az $\mathcal{X}_t^n$ Markov folyamat t-kori eloszlása:

$$\mu_t^n := \mu_0^n e^{tG^n}$$

és

$$\nu_t^n := \prod_{j\in\mathbb{T}^n} \pi_{\boldsymbol{u}(t,j/n)}. \tag{13}$$

Ez utóbbi egy mesterségesen kreált t-paraméterű valószínűségi eloszlás-család Ω^n-en: mikroszkopikus szinten imitálja az Euler egyenlet megoldását. Az idea az, hogy mivel az $1\ll l(n)\ll\sqrt{n}$ méretű mezoszkopikus blokkokban $o(1)$ makroszkopikus idő alatt (ami mikroszkopikus egységekben azért nagyon hosszú idő) kialakul a lokális egyensúly, a valódi μ_t^n eloszlás bizonyos értelemben közel lesz a ν_t^n lokális egyensúlyi eloszláshoz. Ez azért lenne roppant hasznos, mert a ν_t^n *szorzat-mérték*et jól értjük. Ezt a közelséget a

$$H(\mu_t^n|\nu_t^n) := \int_{\Omega^n} \log \frac{d\mu_t^n}{d\nu_t^n} d\mu_t^n$$

relatív entrópiával mérjük. Vegyük észre, hogy két különböző $\mathbb{T} \ni x \mapsto \boldsymbol{u}_k(x) \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2$, profilhoz tartozó, a (13) formulával értelmezett lokális egyensúlyi eloszlás relatív entrópiája

$$H(\nu_1^n|\nu_2^n) \asymp n.$$

A 1. Tételben megfogalmazott (10) Onsager-féle reciprocitási relációt használva, H.-T. Yau u.n. relatív entrópia módszerével (ld. [24], [13], [10], [6]) a következő tétel bizonyítható:

2. Tétel. *Érvényben vannak a 2. fejezetbeli (A), (B), (C) és (D) feltételek és a makroszkopikus viszkozitásra vonatkozó* (12) *feltétel. Legyen* $[0, T] \times \mathbb{T} \ni (t, x) \mapsto \boldsymbol{u}(t, x) \in \mathcal{D}$ *a* (3)+(4) *Cauchy probléma sima megoldása. Ha a* μ_0^n *kezdeti eloszlás olyan, hogy*

$$H(\mu_0^n|\nu_0^n) = o(n),$$

akkor

$$H(\mu_t^n|\nu_t^n) = o(n),$$

$t \in [0, T]$*-ben egyenletesen.*

1. Következmény. *A tétel feltételei mellett a következő állítások érvényesek:*

(i) Az $l(n)$ *mezoszkopikus blokk méret a minimális* (7) *feltételt teljesítse. Ekkor*

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n(t, x) - \boldsymbol{u}(t, x) \right| dx \ \stackrel{\mathbf{P}}{\to} \ 0, \tag{14}$$

$t \in [0, T]$*-ben egyenletesen.*

(ii) Legyen $\boldsymbol{u}^* \in \mathcal{D}$ *tetszőlegesen rögzítve. A* $\pi_{\boldsymbol{u}^*}^n$ *egyensúlyi, abszolút referencia mértékhez viszonyított relatív entrópia megváltozásának aszimptotikája:*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \big(H(\mu_t^n|\pi_{\boldsymbol{u}^*}^n) - H(\mu_0^n|\pi_{\boldsymbol{u}^*}^n) \big) = \int_{\mathbb{T}} \big(S(\boldsymbol{u}(t, x)) - S(\boldsymbol{u}_0(x)) \big) \, dx, \tag{15}$$

ahol $\mathcal{D} \ni \boldsymbol{u} \mapsto S(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}$ *a* (2)*-ben definiált egyensúlyi termodinamikai entrópia.*

Megjegyzések:

(1) A (14) konvergenciából természetesen (9) is következik.

(2) Mivel 2. Tétel értelmében az $S(\boldsymbol{u})$ termodinamikai entrópia egyben a (3) Euler egyenletrendszer Lax entrópiája, és $\boldsymbol{u}(t,x)$ az Euler egyenletrendszer *sima* megoldása, a (15) jobb oldala *eltünik* (nullával egyenlő). Ebből az a *fizikailag releváns* állítás következik, hogy $H(\mu_t^n|\pi_{\boldsymbol{u}^*}^n)$ relatív entrópia $o(n)$-nel — azaz extenzív értelemben elenyésző mennyiséggel — csökken mindaddig, amíg a lökéshullámok meg nem jelennek.

(3) Egy megmaradó mennyiséggel rendelkező attraktív modellek körében a (15)-gyel fomálisan identikus állítást találunk a [11] munkában, mely érvényes a lökéshullámok megjelenése után is.

4.2. Hidrodinamikai limesz a lökéshullámon túl

Mint a 3.1 fejezetben már említettük, a (3) típusú parciális differenciálegyenlet-rendszerek fő nehézsége az, hogy bármilyen sima (4) kezdeti feltételekkel indítjuk is, a megoldás véges időn belül diszkontinuitásokat, u.n. lökéshullámokat mutat. Ez a tény alapvető nehézségeket támaszt a hidrodinamikai limesz levezetése útjába is. Mint az előző tételekben láttuk, az Euler egyenlet-rendszer megoldásának sima tartományában a hidrodinamikai limesz érvényes. Kérdés, hogy ez az eredmény kiterjeszthető-e a lökéshullámok megjelenésén túlra is. Egy komponensű *attraktív* rendszerek hidrodinamikai limeszének hosszú története van, amit itt nem részletezek. Hiperbolikus attraktív rendszerek esetében a legerősebb eredmény [16]-ben található.

A [9] munkában egy konkrét modellre, mely a 2. fejezetben leírt osztályba esik, először sikerült két (vagy több) megmaradó mennyiséggel rendelkező rendszerre valamilyen értelemben a hidrodinamikai határátmenetet belátni, a lökéshullámok megjelenése utáni időtartományban is.

A vizsgált modell a következő. A 2. fejezet jelöléseit használjuk. Az állapottér: $\Omega = \{-1, 0, 1\}$. A megmaradó mennyiségek:

$$\eta(\omega) = 1 - \omega^2, \qquad \zeta(\omega) = \omega.$$

A dinamika szomszédos spinek kicseréléséből áll. Azaz

$$r(\omega_1, \omega_2; \omega_1', \omega_2') = 0 = s(\omega_1, \omega_2; \omega_1', \omega_2'), \qquad \text{ha} \qquad (\omega_1', \omega_2') \neq (\omega_2, \omega_1).$$

A következő egyszerűsített jelölést használjuk:

$$r(\omega_1,\omega_2;\omega_2,\omega_1) =: r(\omega_1,\omega_2), \quad s(\omega_1,\omega_2;\omega_2,\omega_1) =: s(\omega_1,\omega_2)$$

Az aszimmetrikus ráták a következők:

$$\begin{aligned} r(\omega_1,-1) &= 0, & r(-1,1) &= 2, \\ r(0,-1) &= 0, & r(-1,0) &= 1, \\ r(1,0) &= 0, & r(0,1) &= 1. \end{aligned}$$

A szimmetrikus ráták:

$$s(\omega_j,\omega_{j+1}) = 1\!\!1_{\{\omega_j \neq \omega_{j+1}\}}.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy e ráták eleget tesznek a 2. fejezet feltételeinek. Az r aszimmetrikus ráták által definiált modell úgy értelmezhető, mint két egymással kölcsönható aszimmetrikus egyszerű kizárásos modell (asymmetric simple exclusion process): az egyik gáz részecskéi jobbról balra, a másikéi balról jobbra haladnak. Ütközéskor egy speciális értékre választott rátával helyet cserélnek. Lényeges, hogy pontosan $r(-1,1) = r(0,-1) + r(1,0)$. Fizikai értelmezés szempontjából termésetes v helyett a ρ (= részecske sűrűség) jelölést használni. A (ρ,u) sűrűségek természetes tartománya

$$\mathcal{D} := \{(\rho,u) \in [0,1]\times[-1,1] \,:\, \rho + |u| \leq 1\},$$

a kanonikus eloszlások pedig (a természetes paraméterezéssel):

$$\pi_{\rho,u}(0) = \rho, \quad \pi_{\rho,u}(\pm 1) = \frac{1-\rho \pm u}{2}, \qquad (\rho,u) \in \mathcal{D}.$$

Az $\mathcal{X}_t^n$ Markov folyamat generátora (1)-ban értelmezett.

Explicit számolások a következő Euler egyenlet-rendszerhez vezetnek

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t u + \partial_x(\rho + u^2) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Ez az egyenlet-rendszer *Leroux egyenlet-rendszer* néven jól ismert a parciális differenciálegyenletek irodalmában, ld. pl. [17]. Specialitása az, hogy az u.n. *Temple osztály*ba tartozik (a hiperbolikus megmaradási törvényeken belül), ami a legáltalánosabbnál egyszerűbb, de távol nem triviális.

Cauchy problémánkat a (16) egyenlet-rendszer mellett az alábbi kezdeti értékek határozzák meg:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \rho(0,x) = \rho_0(x). \tag{17}$$

A 3. Tételben megfogalmazott fő eredmény feltételei az alábbiak:

(I) A $\sigma = \sigma(n)$ makroszkopikus viszkozitás a következő korlátok között van:

$$n^{-1/2} \ll \sigma \ll 1.$$

(II) Az $l = l(n)$ mezoszkopikus blokk méret a következőképpen van megválasztva

$$n^{2/3}\sigma^{1/3} \ll l \ll n\sigma$$

(III) A kezdeti sűrűségprofilok valószínűségben gyengén konvergálnak. Azaz, bármely $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ teszt-függvény esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big(\Big| \int_{\mathbb{T}} \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \big(\widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n(0,x) - \boldsymbol{u}_0(x)\big)\, dx \Big| \Big) = 0.$$

3. Tétel. *Az imént rögzített (I), (II) és (III) feltételek vannak érvényben.*
(1) A megmaradó mennyiségek $[0,T] \times \mathbb{T} \ni (t,x) \mapsto \widehat{\boldsymbol{\zeta}}^n(t,x)$ *empirikus blokkátlagainak sorozata* feszes $L^1_{t,x}$*-ben. (Azaz, a* (8)*-ben értelmezett* $\mathbb{P}^n$ *valószínűségi mértékek sorozata relatív kompakt, az* $L^1_{t,x}$ *tér norma-topológiája szerint.)*
(ii) Legyen $\mathbb{P}^{n'}$ $L^1_{t,x}$*-ben (norma topológia szerint) gyengén konvergens részsorozat,* $\mathbb{P}^{n'} \Rightarrow \mathbb{P}$*. Ekkor a* $\mathbb{P}$ *határeloszlás a* (16)+(17) *Cauchy probléma entrópia megoldásaira van koncentrálva.*

Megjegyzés: Feltételezve a (16)+(17) Cauchy probléma entrópia megoldásának *unicitását* – amit sajnos nem tudunk – a Tétel (ii) állítása (9)-cel ekvivalens.

A tétel bizonyítása ötvözi a nemlineáris hiperbolikus parciális differenciálegyenlet-rendszerek elmélete keretében kidolgozott és sikeresen alkalmazott *kompenzált kompaktság* módszerét (ld. [12], [19], [20], [5] etc.) a hidrodinamikai határátmenetek elméletének néhány robusztus eszközével. A bizonyítás lényeges elvi eleme egy logaritmikus Szoboljev egyenőtlenség, ami kvantitatív módon kontrollálja a lokális egyensúlyhoz való konvergencia sebességét. Az eredmény és a bizonyítás módszerének rafináltságát illusztrálja az a tény, hogy az infinitezimális generátor spektrális résének pontos becslése nem elég: a bizonyításhoz valóban a finomabb logaritmikus Szoboljev egyenlőtlenség szükséges.

Jelen bizonyítás alapgondolata először a [6] és [7] munkákban jelent meg, ahol Fritz József egy megmaradó mennyiséggel rendelkező de *nem attraktív* rendszerekre alkalmazta. A [9] munkában e gondolatot terjesztettük ki két megmaradó mennyiséggel rendelkező rendszerre.

Kitekintés:

(1) A [8] munkában a kompoenzált kompaktság módszerét alkalmazzák nem attraktív, egy komponensű rendszereknek egy családjára oly módon, hogy az entrópia megoldások *unicitását* is bizonyítják.

(2) A [23] munkában technikailag nagyon hasonló eszközökkel egy perturbációs tételt bizonyítunk, melynek érelmében két komponensű rendszereknek egy igen tág családjában elfajult (nem hiperbolikus) egyensúlyi állapotok kis perturbációit bizonyos, nem-Euler skálájú hidrodinamikai limeszben – legalábbis a sima megoldások tartományában – *univerzálisan* a

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t u + \partial_x(\rho + \gamma u^2) = 0 \end{cases}$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer vezérli, ahol $\gamma \geq 1$ rögzített paraméter.

(3) Általános két komponensű rendszerek esetén – melyek nem Temple-osztálybeli Euler egyenlet-rendszerhez vezetnek – a kompenzált kompaktság módszerének alkalmazhatóságához egy u.n. mikroszkopikus maximum elvet kellene bizonyítanunk. Jó reményünk van arra, hogy e nehézség is leküzdhető lesz a nem túl távoli jövőben.

Köszönetnyilvánítás: Örömmel köszönöm meg Fritz Józsefnek és Valkó Benedeknek a közös munkát és a számtalan élvezetes diszkussziót. E munkát az OTKA támogatta a T037685 sz. pályázat keretében.

Hivatkozások

[1] M. Balázs: Growth fluctuations in interface models. *Annales de l'Institut Henri Poincaré — Probabilitées et Statistiques* **39**: 639-685 (2003)

[2] A. Bressan: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One Dimensional Cauchy Problem.* Oxford Lecture Series in Math. Appl. **20**. Oxford 2000.

[3] C. Cocozza: Processus des misanthropes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **70**: 509-523 (1985)

[4] C.M. Dafermos: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 325, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2000

[5] R.J. DiPerna: Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **82**: 27–70 (1983)

[6] J. Fritz: *An Introduction to the Theory of Hydrodynamic Limits.* Lectures in Mathematical Sciences **18**. Graduate School of Mathematics, Univ. Tokyo, 2001.

[7] J. Fritz: Entropy pairs and compensated compactness for weakly asymmetric systems. *Advanced Studies in Pure Mathematics* (2003) (to appear), www.math.bme.hu/ jofri.

[8] J. Fritz, K. Nagy: On uniqueness of the Euler limit of one-component lattice-gas models. (preprint, 2003)

[9] J. Fritz, B. Tóth: Derivation of the Leroux system as the hydrodynamic limit of a two-component lattice gas. (2003) `http://arxiv.org/abs/math.PR/0304481`

[10] C. Kipnis, C. Landim: *Scaling Limits of Interacting Particle Systems.* Springer, 1999.

[11] E. Kosygina: The behaviour of the specific entropy in the hydrodynamic scaling limit. *Annals of Probabability* **29**: 1086–1110 (2001)

[12] F. Murat: Compacité par compensation. *Ann. Sci. Scuola Norm. Sup. Pisa* **5**: 489-507 (1978)

[13] S. Olla, S.R.S. Varadhan, H.T. Yau: Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise. *Communications in Mathematical Physics* **155**: 523-560 (1993)

[14] L.E. Reichl: *A Modern Course in Statistical Physics*, Second Edition, John Wiley and Sons, 1998

[15] F. Rezakhanlou: Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbb{Z}^d$. *Commun. Math. Phys.* **140**: 417-448 (1991)

[16] F. Rezakhanlou: Microscopic structure of shocks in one conservation laws. *Annales de l'Institut Henri Poincaré — Analyse Non Lineaire* **12**: 119-153 (1995)

[17] D. Serre: *Systems of Conservation Laws.* Vol 1-2. Cambridge University Press, 2000

[18] H. Spohn: *Large Scale Dynamics of Interacting Particles.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1991.

[19] L. Tartar: Compensated compactness and applications to partial differential equations. In: *Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium* ed. R.J. Knops, *Pitman Research Notes in Mathematics* **39**: 136–212, 1979.

[20] L. Tartar: The compensated compactness method applied to systems of conservation laws. In: *Systems of Nonlinear PDEs*, ed. J.B. Ball, NATO ASI Series C/Math. and Phys. Sci. vol **111**: 263–285, Reidel, Dordrecht 1983.

[21] B. Tóth, B. Valkó: Between equilibrium fluctuations and Eulerian scaling. Perturbation of equilibrium for a class of deposition models. *Journal of Statistical Physics* **109**: 177-205 (2002)

[22] B. Tóth, B. Valkó: Onsager relations and Eulerian hydrodynamic limit for systems with several conservation laws. *Journal of Statistical Physics* **112**: 497-521 (2003)

[23] B. Tóth, B. Valkó: Perturbation of singular equilibrium for systems with two conservation laws — hydrodynamic limit. *in preparation* (2003)

[24] H.T. Yau: Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. *Letters in Mathematical Physics* **22**: 63-80 (1991)

Tóth Bálint
BME Matematika Intézet
Egry József u. 1.
H-1111 Budapest
balint@math.bme.hu