Memóriapótló
(pár fontosabb valszám tételről)

Borel-Cantelli lemma: $A_1, A_2, \ldots$ események, $B := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Ekkor:

(i) Ha $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 0$.

(ii) Ha (A_n) független eseményrendszer és $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1$.

Kolmogorov 0-1 tv. Végtelen sok független val. változó által generált σ-algebra maradékmezője az egyre nagyobb küszöbindex utáni val. változók átlal generált algebrák metszete, ebben minden halmaz 0 vagy 1 valószínűségű.

Markov-egyenlőtlenség. Ha $X \geq 0$ val. változó és $\mathbb{E}X < \infty$, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}X}{\lambda} \qquad (\forall \lambda > 0).$$

Csebisev-egyenlőtlenség. Ha X val. változó és $-\infty < \mathbb{E}X < \infty$, akkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > \lambda) \leq \frac{\mathbb{D}^2 X}{\lambda^2} \qquad (\forall \lambda > 0).$$

Jensen-egyenlőtlenség. Ha X val. változó és φ konvex fv., akkor

$$\mathbb{E}\varphi(X) \geq \varphi(\mathbb{E}X).$$

Monoton konvergencia vagy Beppo-Levi tétel. Ha X_n monoton növő val. vált. sorozat és m.b. tart $X \in \mathrm{L}^1$-hez, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X.$$

Dominált konvergencia vagy Lebesgue-tétel. Ha $X_n \to X$ m.b. és $\forall n$-re $|X_n| \leq Y \in \mathrm{L}^1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X.$$

Fatou-lemma. Ha X_n val. vált. sorozat, $\mathbb{E}X_n \neq -\infty$ létezik $\forall n$-re, akkor

$$\mathbb{E}\left(\liminf_n X_n\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}X_n.$$

Minkowsi-egyenlőtlenség. $\forall\, 1 \leq p < \infty$-re

$$\left[\mathbb{E}\left(|X+Y|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\mathbb{E}\left(|X|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\mathbb{E}\left(|Y|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}},$$

ha a jobb oldali várható értékek léteznek.

Hölder-egyenlőtlenség. $\forall p,\, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$-re

$$\mathbb{E}(XY) \leq \left[\mathbb{E}\left(|X|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\mathbb{E}\left(|Y|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}},$$

ha a jobb oldali várható értékek léteznek.

Eloszlásbeli konvergencia: $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ ill. $P_n \to P$ gyengén, ha minden folytonos korlátos fv.-re

$$\int f \,\mathrm{d}P_n \to \int f \,\mathrm{d}P.$$

Sztochasztikus vagy valószínűségbeli konvergencia: $\mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) \to 0 \qquad (\forall \varepsilon > 0)$.
Majdnem biztos vagy egy valószínűségű konvergencia: $X_n \to X$ m.b.
L^p-konvergencia $(p \geq 1)$: $\quad \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) \to 0$.

$$\begin{array}{r} \text{majdnem biztos konv.} \Rightarrow \\ \mathrm{L}^p - \text{konv.} \Rightarrow \end{array} \text{sztochasztikus konv.} \Rightarrow \text{eloszlásbeli konv.}$$

Állítás. Sztochasztikusan konvergens val. vált. sorozatnak mindig van m.b. konvergáló részsorozata.

Állítás. Sztochasztikusan konvergens val. vált. sorozat folytonos függvény általi képe is sztochasztikusan konvergens.

Tétel. Legyen $p \geq 1$, és az X_n L^p-beli val. vált. sorozat konvergáljon X-hez sztochasztikusan. Ekkor $(iv) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (v)$, ahol

- (i) $X_n \to X$ L^p-ben;
- (ii) (X_n) egyenletesen integrálható, azaz

$$\lim_{c \nearrow \infty} \sup_n \int\limits_{\{|X_n| \geq c\}} |X_n|^p \,\mathrm{d}\mu = 0;$$

- (iii) $\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) \to \mathbb{E}\left(|X|^p\right)$;
- (iv) $\sup\limits_n \mathbb{E}\left(|X_n|^q\right) < \infty$ valamely $p < q < \infty$-ra;
- (v) $\exists Y \in \mathrm{L}^p \,:\, |X_n| < Y \qquad (\forall n)$.

Scheffé-tétel. Ha $X_n \geq 0$ val. vált. sorozat,

- (i) $X_n \to X$ m.b., és
- (ii) $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$,

akkor $X_n \to X$ L^1-ben.

1. Riesz-lemma. Ha

- (i) $X_n \to X$ sztochasztikusan, és
- (ii) $\exists \varepsilon_k \to 0$ sorozat, hogy $\sum\limits_k \mathbb{P}(|X_k - X| > \varepsilon_k) < \infty$,

akkor $X_n \to X$ m.b.

2. Riesz-lemma. Ha

- (i) $X_n \to X$ sztochasztikusan, és
- (ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\sum\limits_k \mathbb{P}(|X_k - X| > \varepsilon) < \infty$,

akkor $X_n \to X$ m.b.

Momentumgeneráló fv.: $\varphi(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{m_n t^n}{n!}$, ha a 0 egy környezetében létezik és korlátos; m_n az n-edik momentum.

Karakterisztikus fv.: $\Phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda X}\right)$, ez $\mathbb{R}$-en egyenletesen folytonos.

(i) Ha egy $k \in \mathbb{Z}^+$-ra $\mathbb{E}\left(|X|^k\right) < \infty \Rightarrow \Phi$-nek folytonos k-dik deriváltja van, és $\Phi^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k \mathbb{E}\left(X^k\right)$.

(ii) Ha egy $k > 0$ páros számra $\Phi^{(k)}(0)$ létezik, akkor $\mathbb{E}\left(|X|^k\right)$ is létezik.

Folytonossági tétel. Tartozzanak az F_n eloszlásfv.-ekhez Φ_n karakterisztikus fv.-ek. Ekkor

(i) Ha F_n eloszlás gyengén tart egy F eloszláshoz, akkor Φ_n véges intervallumon egyenletesen tart az F eloszlás által meghatározott karakterisztikus fv.-hez.

(ii) Ha Φ_n pontonként tart egy Φ fv.-hez, és Φ a 0-ban folytonos, akkor létezik F eloszlás, melyhez F_n gyengén tart, és amelyhez tartozó karakterisztikus fv. a Φ.

Tétel. Ha $X_1, X_2, \dots$ függetlenek, akkor $\sum X_i$ sztochasztikus konvergenciája ekvivalens $\sum X_i$ m.b. konvergenciájával.

Kolmogorov-3 sor tétel. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ faevv. Ekkor $\sum X_i$ m.b. konvergenciája ekvivalens olyan $c > 0$ létezésével, melyre mindhárom következő sor konvergál:

$$\sum \mathbb{P}(|X_i| > c), \qquad \sum \mathbb{E}(X_i^{(c)}), \qquad \sum \mathbb{D}^2(X_i^{(c)}),$$

ahol $X_i^{(c)} := X_i \cdot \mathbf{1}\{|X_i| \le c\}$.

NSZGyTV. Ha $X_1, X_2, \dots$ faevv. m várható értékkel és véges második momentummal, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \ge \varepsilon\right) = 0.$$

4. momentum tétel. Ha $X_1, X_2, \dots$ faevv. m várható értékkel és véges 4. momentummal, akkor

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m\right) = 1.$$

(Ezt azért szeretjük, mert könnyű, rugalmas bizonyítása van.)

NSZETV. Ha $X_1, X_2, \dots$ faevv. m várható értékkel, akkor

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m\right) = 1,$$

akár $m = \pm\infty$ esetén is.

Tétel. Ha $X_1, X_2, \dots$ faevv. $m_1, m_2, \dots$ várható értékekkel és $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ szórásokkal, és $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} < \infty$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\left[\frac{S_n}{n} - \frac{m_1 + \dots + m_n}{n}\right] = 0\right) = 1.$$

Birkhof $\mathbf{L}^1$-ergodtétel: Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$-n T mértéktartó leképezés, $X_k := X(T^k\omega)$. Ha T ergodikus, akkor NSZETV igaz (X_k)-ra.

Szubadditív ergodtétel. Legyenek $\{X_{m,n},\ m \le n\}$ val. változók, melyekre

(i) $X_{0,0} = 0,\ X_{0,n} \le X_{0,m} + X_{m,n} \qquad \forall\, 0 \le m \le n$;

(ii) $\{X_{(n-1)k,\,nk},\ n \ge 1\}$ egy stacionárius folyamat $\forall k \ge 1$-re;

(iii) $\{X_{m,\,m+k},\ k \ge 0\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{X_{m+1,\,m+k+1},\ k \ge 0\}$ minden m-re;

(iv) $\mathbb{E}X_{0,1}^+ < \infty$.

Legyen $\alpha_n = \mathbb{E}X_{0,\,n} < \infty$, mely a fentiek miatt létezik. Ekkor

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \in [-\infty,\, \infty), \qquad \text{és}$$

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{X_{0,\,n}}{n} \text{ létezik m.b. és } \in [-\infty,\, \infty),$$

továbbá $\mathbb{E}X_\infty = \alpha$. Ha $\alpha > -\infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{X_{0,\,n}}{n} - X_\infty\right| = 0.$$

Ha ráadásul az (ii) alatti folyamat ergodikus is, akkor $X_\infty = \alpha$ m.b.

CHT. Ha $X_1,\, X_2, \dots$ faevv. m várható értékkel és σ szórással, akkor

$$\frac{S_n - n\cdot m}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,\, \sigma^2) \quad \text{normálishoz,} \quad \Phi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}u$$

eloszlásfv.-el.

Doob maximálegyenlőtlenség.

- Diszkrét eset. Ha X_n szubmartingál, azaz $\forall n$ $\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) \geq X_n$, és $X_n \geq 0$ m.b., akkor $\forall\lambda > 0$-ra
$$\mathbb{P}\left(\max_{n\geq k\geq 0} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}X_n}{\lambda}.$$
- Folytonos eset. Ha $p \geq 1, M_t$ jobbról folyt. L^p-martingál, akkor $\forall t \geq 0$, $C > 0$-ra
$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq C\right) \leq \frac{1}{C^p}\mathbb{E}\left(|M_t|^p \cdot \mathbf{1}\left\{\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq C\right\}\right) \leq \frac{1}{C^p}\mathbb{E}\left(|M_t|^p\right).$$
- Még egy folytonos eset. Ha $p > 1$, akkor
$$||M_t||_p \leq ||\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|\,||_p \leq \frac{p}{p-1}||M_t||_p.$$

Martingál konvergenciatétel. Ha $p \geq 1$, M_t jobbról folytonos L^p-korlátos martingál, azaz

$$\sup_{0\leq t\leq\infty} \mathbb{E}\left(|M_t|^p\right) < \infty,$$

akkor $\lim\limits_{t\to\infty} M_t = M_\infty$ m.b. létezik és L^p-ben van. Ha ráadásul M egyenletesen integrálható, vagy $p > 1$, akkor M_t L^p-ben is konvergál, és a martingál tulajdonság $t = \infty$-re is kiterjed:

$$\mathbb{E}(M_\infty\,|\,\mathcal{F}_s) = M_s, \qquad ||M_\infty||_p = \lim_{t\to\infty} ||M_t||_p, \quad \text{és} \quad ||\sup_{0\leq s\leq\infty} M_s||_p \leq \frac{p}{p-1}||M_\infty||_p.$$

Reziduumtétel. Egy f, G-n $\mathbb{C}$-analitikus függvény *reziduuma* az a pontban a c_{-1} Laurent-együttható. Ha a C G-beli zárt, szakaszosan sima görbe körülveszi az a_i szinguláris pontokat melyek torlódási pont nélküli halmazt alkotnak G-ben, akkor

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_i \mathrm{Res}_{a_i} f.$$

Feltételes várható érték. Legyen $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ szintén σ-algebra. Egy valószínűségi változó $\mathcal{G}$-*mérhető*, ha mérhető halmazok e változó szerinti ősképei $\mathcal{G}$-nek elemei.

Ha X integrálható valószínűségi változó, akkor $\mathbb{E}(X\,|\,\mathcal{G})$ a ($\mathbb{P}|_\mathcal{G}$-m.b. ekvivalencia erejéig) egyetlen $\mathcal{G}$-mérhető valószínűségi változó, melyre

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{A\}X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{A\}\mathbb{E}(X\,|\,\mathcal{G})\right] \qquad (\forall A \in \mathcal{G}).$$

Pár (m.b.) szabály:

- $\mathbb{E}(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}X$.
- Ha X $\mathcal{G}$-mérhető, akkor $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.
- $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = X$.
- Ha $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, akkor $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_1) \mid \mathcal{G}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_1)$.

Egy X_t *folyamat által generált* $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$, ez növekvő.