SOROK, FÜGGVÉNYSOROK

SIMON ANDRÁS

TARTALOMJEGYZÉK

1. NUMERIKUS SOROK

Sor: speciális sorozat (a részletösszegek sorozata).

1.1. Definíció. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens, ha a részletösszegek $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ sorozata az. Ilyenkor a sor összege $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m$.

Vigyázat: $\sum a_n$-nel jelöljük a sort és a sorösszeget is.

1.2. Állítás. *$\sum$ lineáris, azaz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*

Biz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} (a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} a_n + \sum_{n=0}^{m} b_n\right)$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} ca_n = \lim_{m\to\infty} c\sum_{n=0}^{m} a_n = c \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

vagyis $\sum$ azért lineáris, mert lim az. □

A definícióból látszik, hogy konvergencia szempontjából az első néhány tag nem számít (sorösszeg szempontjából persze igen). Ezért az összes konvergenciakritériumban elég, hogy valamilyen indextől kezdve.

---

http://www.math.bme.hu/jegyzetek/051356_Csatar_Gyorgyne_Sorok_Fuggvenysorok.pdf
http://www.math.bme.hu/jegyzetek/051201_Adam_K._Matematika_Peldatar_IV..pdf.

1.3. Példák. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergens, mert $s_n = 1$ vagy 0 attól függően, hogy n páros vagy páratlan; tehát $\nexists \lim_n s_n$.

(2) Mértani sor: $q \neq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = (1-q^{n+1})/(1-q)$ (és persze $n+1$ ha $q=1$). Következésképp

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{ha } |q|<1 \\ \text{divergens} & \text{ha } |q| \geq 1 \end{cases}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Ez konvergens, és a sorösszeg 1, mert $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ miatt $s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

1.4. Tétel (Cauchy). *$\sum a_n$ konvergens $\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m > n > N)\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$.*

Biz. Triviális a sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-ból:

$$\sum a_n \text{ konvergens} \iff s_n \text{ konvergens} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m > n > N)|s_m - s_n| < \epsilon$$

és $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$. □

1.5. Következmény. *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n (= s_n - s_{n-1}) \to 0$.*

De $a_n \to 0$ korántsem elégséges feltétele $\sum a_n$ konvergenciájának. Nemsokára látni fogjuk, hogy pl. $\sum \frac{1}{n}$ nem konvergens.

1.6. Állítás. *Ha $a_n \geq 0$, akkor $\sum a_n$ konvergens $\iff s_n$ korlátos.*

Biz. $a_n \geq 0$ miatt s_n monoton nő, tehát pontosan akkor konvergens, ha korlátos. □

1.7. Tétel (Kondenzációs kritérium). *Ha $0 \leq a_n \searrow$, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergens.}$$

Biz. Előző állítás miatt elég, hogy a részleteszögek egyszerre korlátosak. Jelölje s_n ill. t_n a két sor n. részletösszegét.

($\Leftarrow$) Idea:

$$\begin{array}{l} a_1 + \underbrace{a_2 + a_3} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7} + \cdots \\ a_1 + 2a_2 \qquad + 4a_4 \qquad\qquad + \cdots \end{array}$$

t_n korlátos, tehát elég belátni, hogy $s_{2^{k+1}-1} \leq t_k$. Indukció: $k=0$: $s_{2^1-1} = s_1 = a_1 = t_0$. Thf. $k \geq 1$ és $k-1$-re igaz. $s_{2^{k+1}-1} = s_{2^k-1} + (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^k+2^k-1}) \leq s_{2^k-1} + 2^k a_{2^k} \leq t_{k-1} + 2^k a_{2^k} = t_k$ mert $a_n \searrow$ és ind. felt.

($\Rightarrow$) Idea:

$$\begin{array}{l} s_8 = \quad a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} \\ \frac{1}{2}t_3 = \frac{1}{2}a_1 + a_2 + \quad 2a_4 + \qquad\qquad 4a_8 \end{array}$$

s_n korlátos, tehát elég, hogy $t_k/2 \leq s_{2^k}$. Indukció: $k=0$: $t_0/2 = a_1/2 \leq a_1 = s_1 = s_{2^0}$. Thf. k-ra igaz. $t_{k+1}/2 = t_k/2 + 1/2 \cdot 2^{k+1} a_{2^{k+1}} \leq s_{2^k} + 2^k a_{2^{k+1}} \leq s_{2^{k+1}}$; az utolsó lépésben azt használtuk, hogy $s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^k+2^k} \geq s_{2^k} + 2^k a_{2^{k+1}}$. □

1.8. Következmény. *$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ („harmonikus sor”) divergens.*

Biz. $0 \le 1/n \searrow$, tehát az előző tétel miatt pontosan akkor divergens, ha $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot 1/2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ az. $\square$

Sőt:

1.9. Következmény. *$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ konvergens $\iff p > 1$.*

Biz. Ha $p \le 0$, akkor trv. divergens, mert $1/n^p = n^{-p}$, ez meg $= 1$ (ha $p = 0$), vagy $\to \infty$ (ha $p < 0$), azaz semmiképen sem $\to 0$. Tehát ámn. $p > 0$. De akkor $n^p \nearrow \infty$, tehát $0 \le 1/n^p \searrow 0$, a tétel szerint tehát konvergens $\iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot 1/2^{kp} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$ konvergens $\iff$ $2^{1-p} < 1$ (mért. sor) $\iff 1 - p < 0$. $\square$

1.10. Definíció. A $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens. Feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

1.11. Állítás. *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens.*

Biz. Cauchy-kritériummal (1.4): $\epsilon > 0$-ra kellene N, hogy minden $m > n > N$-re $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$. A $\sum |a_n|$ sor konvergenciája és a Cauchy-kritérium miatt ehhez a sorhoz van jó N, ami viszont $\sum a_n$-hez is jó, mert a háromszögegyenlőtlenség miatt minden $n < m$-re $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k|$. $\square$

1.12. Tétel (Majoráns/minoráns kritérium)**.** *Ha $|a_n| \le b_n$ (végülis) és $\sum b_n$ konv, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.*

Biz. Trv.: Cauchy vagy részletösszegek korlátossága. $\square$

1.1. $\limsup$ és $\liminf$ Emlékeztető: $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ az a_n sorozat sűrűsödési értéke, ha a_n-nek van x-hez tartó részsorozata.

1.13. Definíció. Az a_n valós sorozatra $\limsup_{n\to\infty} a_n$ az a_n sűrűsödési értékeinek supremuma abban a kicsit kiterjesztett értelemben, hogy ∞, ha ∞ is sűrűsödési értéke a_n-nek, és $-\infty$ ha csak a $-\infty$ az. (Ez azt jelenti, hogy a természetes módon rendezett $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ halmazban számolunk supremumot.) Hasonlóan: $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ha a_n nem korlátos alulról, és $\liminf_{n\to\infty} a_n$ az a_n sűrűsödési értékeinek infimuma (ugyanilyen értelemben).

1.14. Házi feladat. $\limsup a_n = \infty$ akkor és csak akkor, ha a_n nem korlátos felülről.

1.15. Állítás. $\limsup a_n = -\infty \iff a_n \to -\infty$

Biz. ($\Leftarrow$) $-\infty$ az egyetlen sűrűsödési érték.
($\Rightarrow$) Ha $a_n \not\to -\infty$, akkor $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) a_n \ge K$, vagyis valamilyen $K \in \mathbb{R}$-re a sorozatnak végtelen sok tagja van K fölött; ha ez a részsorozat nem korlátos felülről, akkor van ∞-hez tartó részsorozata, ha igen, akkor meg a Bolzano–Weierstrass tétel miatt van konvergens részsorozata; tehát a_n-nek mindkét esetben van K-nál nem kisebb sűrűsödési értéke, következésképp $\limsup a_n \ge K > -\infty$. $\square$

1.16. Házi feladat. $\liminf a_n = -\limsup -a_n$ és $\limsup a_n = -\liminf -a_n$

1.17. Állítás. $\liminf a_n \le \limsup a_n$, *és ha a_n konvergens, akkor* $\liminf a_n = \lim a_n = \limsup a_n$.

Biz. Az első állítás azért igaz, mert $\inf H \le \sup H$ minden H halmazra, második meg mert ha a_n konvergens, akkor $\lim a_n$ az egyetlen sűrűsödési értéke. $\square$

1.18. Állítás. $\limsup a_n < a$ *pontosan akkor, ha van olyan* $q < a$*, amire valamilyen indextől kezdve* $a_n \le q$*.*

Biz. Ha $\limsup a_n = \infty$, akkor mindkét oldal hamis (a jobboldal 1.14 miatt). Ha $\limsup a_n = -\infty$, akkor mindkét oldal igaz (a jobboldal 1.15 miatt). Tehát feltehetjük, hogy $\limsup a_n \in \mathbb{R}$, és így a_n felülről korlátos. Legyen E az a_n sűrűsödési értékeinek halmaza.
($\Rightarrow$) $q = \frac{1}{2}(a + \limsup a_n) < a$ jó lesz, mert ha efölött végtelen sok eleme volna a_n-nek, akkor (a felülről korlátosság miatt) az ezek által alkotott részsorozatnak Bolzano–Weierstrass miatt volna konvergens részsorozata, és annak határértéke $\ge q > \limsup a_n$, ami ellentmond annak, hogy $\limsup a_n = \sup E$.
($\Leftarrow$) Mivel q fölött a_n-nek csak véges sok tagja van, q-nál nagyobb számhoz nem tarthat a_n egyetlen részsorozata sem, azaz q felső korlátja E-nek, és így $\limsup a_n \le q < a$. □

1.19. Állítás. (1) *Ha* $a < \limsup a_n$*, akkor* $a < a_n$ *végtelen sok* n*-re.*
(2) *Ha* $a < \liminf a_n$*, akkor valamilyen indextől kezdve* $a \le a_n$*.*

Biz. (1) Ha a_n nem korlátos felülről, akkor igaz a konklúzió. Ha korlátos felülről, és csak véges sok n-re igaz, hogy $a < a_n$, azaz valamilyen indextől kezdve $a_n \le a$, akkor a felső korlátja a_n sűrűsödési értékeinek, és ezért $\limsup a_n \le a$.
(2) Ha $a < \liminf a_n (= -\limsup -a_n$ 1.16 miatt), akkor $\limsup -a_n < -a$, és akkor 1.18 miatt valamilyen indextől kezdve $-a_n \le -a$, azaz $a \le a_n$.

Vagy: A feltevésből következik, hogy a_n alulról korlátos. Ha nem igaz, hogy $a \le a_n$ valamilyen indextől kezdve, akkor $a_n < a$ végtelen sokszor; de akkor az alulról korlátosság miatt az ilyenek közül kiválasztható egy konvergens részsorozat, és ennek a határértéke $\le a$, következésképp $a \ge \liminf a_n$, ellentmondva a feltevésnek. □

1.20. Házi feladat. Ezek az állítások nem fordíthatók meg.

Vigyázat: $\limsup$ nem cserélhető fel a szorzással: ha $a_n = 0, 1, 0, 1, \ldots$ és $b_n = 1, 0, 1, 0, \ldots$, akkor $\limsup a_n \cdot \limsup b_n = 1 \cdot 1 \ne 0 = \limsup a_n b_n$. Akkor sem feltétlenül, ha az egyik sorozat konvergens: $a_n = 1/n$, $b_n = n$.

1.21. Állítás. *Ha* $\exists \lim a_n \in \mathbb{R}^+$ *, akkor* $\limsup a_n b_n = \lim a_n \cdot \limsup b_n$*.*

1.2. Gyök- és hányadoskritérium

1.22. Tétel (Gyökkritérium)**.** (1) *Ha van olyan* $q < 1$*, amire valamilyen indextől kezdve* $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$*, azaz (ld. 1.18) ha* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *(speciálisan: ha* $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*), akkor* $\sum a_n$ *abszolút konv,*
(2) *ha* $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ *végtelen sok* n*-re (speciálisan (ld. 1.19(1)): ha* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*), akkor* $\sum a_n$ *divergens.*

Biz. (1): $\sum q^n$ konvergens és majorálja $\sum |a_n|$-t.
(2) A feltevés miatt $|a_n| \ge 1$ végtelen sok n-re; tehát $a_n \not\to 0$. □

$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$-ből semmi nem következik $\sum a_n$ konvergenciájára vonatkozóan: $\sum 1/n$ divergens, $\sum 1/n^2$ konvergens, noha mindkettőre igaz ez a feltétel.

1.23. Példa. $\sum \frac{n^2}{2^n}$ konvergens, mert $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$.

1.24. Tétel (Hányadoskritérium). (1) *Ha van olyan $q<1$, amire valamilyen indextől kezdve $|a_{n+1}/a_n| \le q$, azaz (ld. 1.18) ha* $\limsup |a_{n+1}/a_n| < 1$ *(speciálisan: ha* $\lim_n |a_{n+1}/a_n| < 1$*), akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.*

(2) *Ha $|a_{n+1}/a_n| \ge 1$ valamilyen indextől kezdve (speciálisan (ld. 1.19(2)): ha* $\liminf |a_{n+1}/a_n| > 1$*), akkor $\sum a_n$ divergens.*

Egyébként bármi lehet.

Itt nem elég a divergenciához, mint a gyökkritériumban, hogy $a_{n+1}/a_n \ge 1$ végtelen sokszor, mert legyen $\sum a_n$ tetszőleges konvergens sor, és „duplázzuk meg”: $a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + \ldots$. Az így kapott sor konvergens, noha $a_{n+1}/a_n = 1$ minden páratlan n-re. De mutatja ezt az alábbi összefésülős példa is, ami konvergens, noha $a_{n+1}/a_n > 1$ végtelen sokszor.

Biz. Konvergencia: ha minden $n>N$-re $|a_{n+1}/a_n| \le q < 1$, akkor $(\forall n > N)|a_{n+1}| \le q\,|a_n|$, amiből (indukcióval) $|a_{N+k}| \le q^k\,|a_N|$, azaz $(\forall n > N)|a_n| \le q^{n-N}\,|a_N| = \frac{|a_N|}{q^N} q^n$. De $\sum \frac{|a_N|}{q^N} q^n$ konvergens mértani sor, tehát majoráns-kritérium miatt $\sum |a_n|$ is konvergens.

Divergencia: Ha $|a_{n+1}/a_n| \ge 1$, azaz $|a_{n+1}| \ge |a_n|$ minden $n > N$-re, akkor $|a_n|$ N után monoton nő, tehát a_n nem tarthat 0-hoz. □

1.25. Példa. $\sum \frac{n!}{(2n)!}$ konvergens, mert $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow 0 < 1$. (Faktoriálisnál a hányadoskritérium gyakran célravezető.)

Hányadoskritériumnál is: $\sum 1/n$ és $\sum 1/n^2$-re $\lim |a_{n+1}/a_n| = 1$, noha az egyik divergens, a másik konvergens. És: ha a_n az $1/2^n$, $1/3^n$ összefésülése, akkor $\sum a_n$ konvergens (mert külön-külön az; de gyökkritériummal is kijön), de a hányadoskritérium nem működik: $\liminf a_{n+1}/a_n = \lim (2/3)^n = 0$, $\limsup a_{n+1}/a_n = \lim (3/2)^n = \infty$, $\liminf \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[2n]{1/3^n} = 1/\sqrt{3}$, $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[2n]{1/2^n} = 1/\sqrt{2}$. Ez mutatja, hogy hányadoskritériumban divergenciához nem elég, hogy $\limsup > 1$ (mert most ∞, mégis konvergens).

(Ez a példa egy kicsit részletesebben:

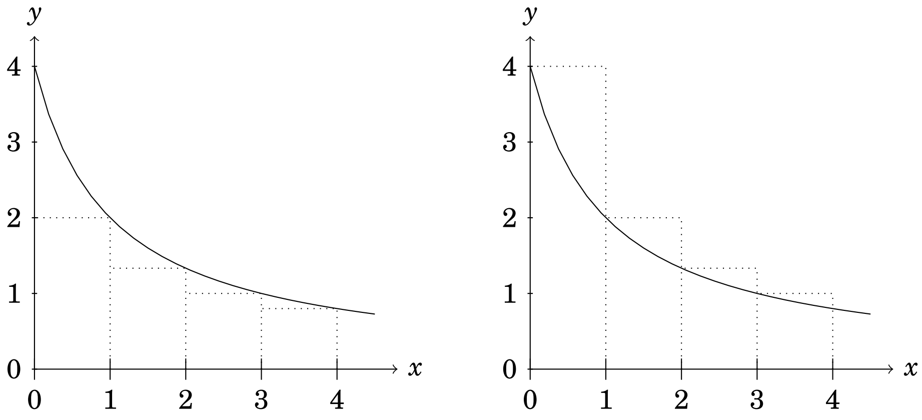
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}} & \text{ha } n \text{ ps} \\ \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} & \text{ha } n \text{ ptlan} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}}{\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}}} = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ ps} \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{3^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}} & \text{ha } n \text{ ptlan} \end{cases}$$

Tehát $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \lim \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$ és $0 \le \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \lim \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.)

1.3. További konvergenciakritériumok

1.26. Tétel (Integrálkritérium). *Ha $0 \le f \searrow [0,\infty]$-n, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ konvergens $\iff \int_0^\infty f$ konvergens.*

Nem muszáj 0-nál kezdeni.



1. ábra. Integrálkritérium

Biz. Minden N-re : $\sum_{n=1}^{N} f(n) \le \int_0^N f \le \sum_{n=0}^{N-1} f(n)$ (ezek a $\{0,1,\dots,N\}$ felosztáshoz tartozó alsó és felső összegek). $F(x) = \int_0^x f$ monoton nő, tehát pontosan akkor konvergens, ha korlátos.

($\Rightarrow$) $\sum$ konvergens ($=s$), akkor minden x-re ($N = \lceil x \rceil$) $\int_0^x f \le \int_0^N f \le \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \le s$.

($\Leftarrow$) $\int$ konvergens ($=s$), akkor minden N-re $\sum_{n=1}^{N} f(n) \le \int_0^N f \le s$, azaz a részletösszegek korlátosak, 1.6 miatt tehát a sor konvergens (mert nemnegatív tagú). □

Alkalmazás: $\sum 1/n^p$ konvergens $\iff p > 1$.

$$\int 1/x^p = \int x^{-p} = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}} & \text{ha } p \ne 1 \\ \ln x & \text{ha } p = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty 1/x^p = \begin{cases} \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^k = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\cdot(0-1) = \frac{1}{p-1} & \text{ha } p > 1 \\ \frac{1}{1-p}\cdot(\infty-1) = \infty & \text{ha } p < 1 \end{cases} \\ \lim_{k\longrightarrow\infty} \ln k - \ln 1 = \infty & \text{ha } p = 1 \end{cases}$$

1.27. Tétel (Intelligens összehasonlító kritérium)**.** *Ha $a_n \ge 0 < b_n$ és $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} > 0$, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ egyszerre konvergensek vagy divergensek.*

Biz. Ha $\lim = L$, akkor valamilyen N-től kezdve $L/2 \le a_n/b_n \le 2L$, azaz $0 \le b_n \le 2a_n/L$ és $0 \le a_n \le 2Lb_n$. Ebből már a majoráns-kritérium miatt következik az állítás. □

1.28. Tétel (Leibniz)**.** *Ha $\operatorname{sgn} a_n = (-1)^n$, $|a_n| \searrow 0$, akkor $\sum a_n$ konvergens. És a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke, azaz $\left|\sum_{n=1}^\infty a_n - \sum_{n=1}^m a_n\right| \le |a_{m+1}|$.*

Biz. Legyen $b_n = |a_n|$. Tehát $0 \le b_n \searrow 0$, és az kéne, hogy a $-b_1 + b_2 - b_3 + \dots = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n b_n$ sor konvergál. Legyen s_n az n. részletösszeg.

$s_{2n} \searrow$ mert $s_{2(n+1)} = s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} \le s_{2n}$ (mert $-b_{2n+1} + b_{2n+2} \le 0$). s_{2n} alulról korlátos mert $s_{2n} = -b_1 + \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\ge 0} + \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\ge 0} + \ldots + b_{2n} \ge -b_1$. Tehát s_{2n} konvergens, mondjuk $\to s$.

Node $s_{2n+1} = s_{2n} - b_{2n+1} \to s - 0 = s$. Tehát s_{2n} és s_{2n+1} összefésülése is $\to s$.

Hibabecslés: mivel $s_{2n} \searrow s$ és (ugyanígy) $s_{2n+1} \nearrow s$,

(1) $$s_{2n+1} \le s \le s_{2n} \qquad \text{minden } n\text{-re,}$$

tehát azt kellene belátni, hogy $s_{2n} - s \le b_{2n+1}$ és $s - s_{2n+1} \le b_{2n+2}$. De az elsőt átrendezve azt kapjuk, hogy $s_{2n+1} = s_{2n} - b_{2n+1} \le s$, ami igaz (1) miatt, a másodikat átrendezve pedig azt, hogy $s \le s_{2n+1} + b_{2n+2} = s_{2n+2}$, ami szintén. $\square$

Alkalmazás: az alternáló harmonikus sor ($\sum(-1)^n/n$) feltételesen konvergens.

1.4. Példák

(1) $\sum \frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum \frac{1}{2^n} + \sum \frac{1}{3^n}$ konvergens

(2) $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ konjugálással $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, tehát konvergens

(3) $\sum \frac{2n}{n+1}$ $a_n \not\to 0$ divergens

(4) $\sum \frac{0.5^n}{n}$ majoránssal ($\sum (0.5)^n$ majorálja) vagy gyökkritérium, konvergens

(5) $\sum (\frac{n}{n^2+1})^{n^2}$ gyökkritérium $\sqrt[n]{a_n} = (\frac{1}{n+\frac{1}{n}})^n < \frac{1}{n^n} \to 0 < 1$, tehát konvergens. Vagy majoráljuk: $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2} \le \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1/n)^2} \le \frac{1}{n^2}$

(6) $\sum \frac{n^n+1}{n^n-1}$ $a_n \to 1$ divergens

(7) $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ $\int$- vagy 2^k-s kritérium (ezek mindig ugyanakkor alkalmazhatók): $2^k a_{2^k} = \frac{1}{\ln^2 2^k} = \frac{1}{(k \ln 2)^2} \sim \frac{1}{k^2}$ konvergens

(8) $\sum \frac{\sin n}{n(n+1)}$ majorálja $\frac{1}{n^2}$ abszolút konvergens

(9) $\sum (1 - \cos \frac{\pi}{n})$ Ld. lábjegyzet[1]: $1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$ és $\frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{1/n^2} \to \frac{\pi^2}{2}$ mert $\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{1/n} = \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2n}} \to \frac{\pi}{2}$. Tehát $\sim \frac{1}{n^2}$.

(10) $\sum \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$ gyökkritérium, vagy $\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n} \le \frac{1}{2^n}$ konvergens mértani sor

(11) $\sum \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ gyökkritérium, konvergens. Vagy $a_n \le \frac{n^2}{2^n}$ és $\sum \frac{n^2}{2^n}$ gyök- vagy hányadoskritériummal konvergens.

(12) $\sum \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$ majorálható $\sum (\frac{1}{e})^n$-el.

(13) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$ Kondenzációs kritériummal: $2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{n^k \ln^k n} \to \infty$.

(14) $\sum_2 \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ kondenzációs kritériummal: $\ln 2^2 > 1 \rightsquigarrow \ln 2 > 1/2 \rightsquigarrow \frac{2^k}{(\ln 2^k)^{\ln 2^k}} = \frac{2^k}{(k \ln 2)^{k \ln 2}} \le \frac{2^k}{(k/2)^{k/2}} = \frac{4^{k/2}}{(k/2)^{k/2}} \le (\sqrt{4/5})^k$ konvergens mértani sor. Vagy kondenzációs és gyökkritérium: $\sqrt[k]{\frac{2^k}{(\ln 2^k)^{\ln 2^k}}} = \frac{2}{(k \ln 2)^{\ln 2}} \to 0 < 1$.

(15) $\sum_4 \frac{1}{(n+3)^2}$ ezt még lehetne majorálni $\sum \frac{1}{n^2}$-el, de ha $-$ lenne a nevezőben, akkor már nem lehetne. (Igaz, akkor is lehetne $\frac{1}{(2n)^2}$-el.) Helyette mindkét esetben $\sim \frac{1}{n^2}$ és ezért konvergens.

(16) $\sum \frac{1}{n+3}$ mint az előzőben: minorálás helyett $\sim \frac{1}{n}$ és ezért divergens.

(17) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ divergens mert $\sim \frac{1}{n}$

(18) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+3n+1}}$ konvergens mert $\sim \frac{1}{n^{4/3}}$

(19) $\sum \frac{1}{\ln(3n+2)}$ divergens, mert $\frac{1}{\ln(3n+2)} \rhd \frac{1}{3n+2}$ és $\frac{1}{3n+2} \sim \frac{1}{n}$

(20) $\sum \frac{1}{n+\sin^2 n}$ divergens, mert $\sim \frac{1}{n}$

[1]linearizáló képleteket tudni kell: $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ és $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

(21) $\sum \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$ konvergens, mert $\sim \frac{1}{n^2}$
(22) $\sum \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ divergens mert $\sim \frac{1}{n}$ mert $\operatorname{arctg} n \to \pi/2$
(23) $\sum \frac{\operatorname{arctg} n^2}{n^2}$ ugyanezért $\sim \frac{1}{n^2}$
(24) $\sum \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ divergens mert $\sim \frac{1}{n}$ mert: $\operatorname{arctg} x \sim_0 \tan x \sim_0 x$ mert $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y\to 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = 1$. Mellesleg ugyanígy $\arcsin x \sim_0 \sin x \sim_0 x$: $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$.
(25) $\sum \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$ konvergens mert $\sim \frac{1}{n^2}$ (az előző ($\lim_0 \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1$) miatt $\lim_a \frac{f(x)}{\operatorname{arctg} f(x)} = 1$ ha $\lim_a f(x) = 0$).
(26) $\sum n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$ divergens mert $\sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$
(27) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ divergens, mert $\sim \frac{1}{n}$ (ami érdekes, mert $\sum \frac{1}{n^{1+p}}$ már konvergens tetsz. $p > 0$-ra).
(28) $\sum \frac{1}{\ln^n n}$ gyökkritérium konvergens
(29) $\sum \frac{1}{n \ln n}$, divergens 2^k-s kritériummal: $\sum \frac{2^k}{2^k \ln 2^k} = \sum \frac{1}{k \ln 2}$ divergens.
(30) $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$ divergens mert $\frac{1}{\ln(n!)} = \frac{1}{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n)} \geq \frac{1}{n \ln n}$ és $\sum \frac{1}{n \ln n}$ az előző szerint divergens.
(31) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$ hányadoskritérium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1$$

tehát konvergens.
(32) $\sum (\frac{n+1}{n})^n$ trv. divergens mert $a_n \to e \neq 0$.
(33) $\sum \sin \frac{\pi}{2^n}$ konvergens mert $\sim \frac{1}{2^n}$ $\left(\frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2^n}} \to \pi\right)$
(34) $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ nem majorálható $\frac{1}{n^2}$-el, de $\ln n \lhd n^{1/2}$ (mert $\lim_\infty \frac{\ln x}{x^{1/2}} =_{\text{L'H}} \lim_\infty \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$) $\rightsquigarrow \frac{\ln n}{n^2} \lhd \frac{1}{n^{3/2}}$, következésképp konvergens. 2^k-s használatához tudni kéne, hogy monoton.
(35) $\sum \frac{\ln n}{n}$ minorálja $\frac{1}{n}$, tehát divergens
(36) $\sum \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$ divergens mert $\sim \frac{1}{n}$
(37) $\sum \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ konvergens mert $\sim \frac{1}{n^2}$
(38) $\sum \frac{1}{n^2} \cos \frac{1}{n}$ konvergens mert $\sim \frac{1}{n^2}$
(39) $\sum \frac{1}{n^2} \cos n$ abszolút konvergens mert majorálja $\frac{1}{n^2}$
(40) $\sum \ln(1 \pm \frac{1}{n})$ divergens mert $\sim \frac{1}{n}$ mert $\lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
(41) $\sum \ln(1 \pm \frac{1}{n^2})$ konvergens mert $\sim \frac{1}{n^2}$ ugyanezért.
(42) $\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ értéke 1/2 pontossággal: Leibniz, tehát konvergens, és $\left|\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n \ln n} - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n \ln n}\right| \leq \frac{1}{N \ln N}$; tehát olyan N kéne, amire $\frac{1}{N \ln N} \leq \frac{1}{2}$, azaz $2 \leq \ln(N^N)$, azaz $e^2 \leq N^N$, azaz $N \geq 3$. Tehát $\frac{1}{2 \ln 2}$ 1/2-nél pontosabb közelítés.

1.5. Zárójel, átrendezés Konvergens sorozatot bezárójelezünk konvergens marad (részletösszegek sorozata az eredeti sor részletösszegeinek részsorozata). Divergens sorozatot bezárójelezünk nem biztos, hogy divergens marad (azaz konvergensből nem hagyhatunk el zárójeleket): $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$.

$\sum a_n$ egy átrendezése: $\sum a_{\pi n}$, ahol $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció.

1.29. Tétel (Riemann). *Abszolút konvergens sor átrendezése nem változtat a konvergencián és az összegen. Feltételesen konvergens sort viszont bárhogy át lehet rendezni (úgy, hogy akárkihez tartson, meg úgy is, hogy divergens legyen).*

1.30. Példa. Egy példa, ami mutatja, hogy az átrendezés megváltoztathatja a sorösszeget: az alternáló harmonikus sorról tudjuk, hogy konvergens, legyen mondjuk S az összege (majd látni fogjuk később, hogy $S = -\ln 2$, de ez most lényegtelen).

$$\begin{aligned} S &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \ldots + \frac{1}{12} - \ldots \\ \frac{1}{2}S &= \quad\; -\frac{1}{2} \quad\; + \frac{1}{4} \quad\; - \frac{1}{6} \quad\; + \frac{1}{8} - \ldots + \frac{1}{12} - \ldots \end{aligned}$$

tehát a kettő összege

$$\frac{3}{2}S = -1 + \quad -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \quad -\frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{1}{6} \quad - \ldots$$

miközben az utolsó sor az első egy átrendezése.

2. Függvénysorozatok, sorok

2.1. Definíció (Pontonkénti konvergencia). $f_n \longrightarrow f$ $H \subseteq \mathbb{R}$-en ha $\forall x \in H$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ H-n, ha $F_k = \sum_{n=0}^{k} f_n \longrightarrow f$ H-n (azaz ha $(\forall x \in H) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x)$).

Folytonos függvények limese nem feltétlenül folytonos (2. ábra (a)):

$$H = [0,1], \qquad f_n(x) = x^n \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0,1) \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}.$$

Máshogy fogalmazva az a probléma, hogy a különféle határértékképzések nem felcserélhetők: $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 1-} (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)$.

Más példa ugyanerre (2. ábra (b)):

$$H = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \le -1/n \\ nx & \text{ha } x \in (-1/n, 1/n) \\ 1 & \text{ha } 1/n \le x \end{cases} \longrightarrow \operatorname{sgn}.$$

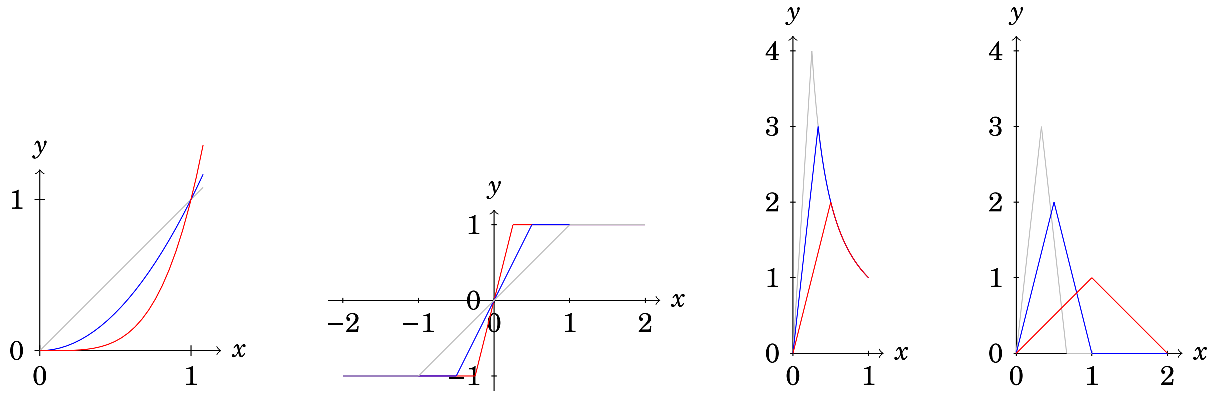
Zárt intervallumon folytonos függvények limese nem feltétlenül korlátos (2. ábra (c)):

$$H = [0,1], \qquad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{ha } x \in [0, 1/n] \\ 1/x & \text{ha } x \in (1/n, 1] \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ 1/x & \text{ha } x \in (0,1] \end{cases}.$$

Példa arra, hogy $f_n \longrightarrow f$, f_n integrálható minden n-re, de $\lim_n \int f_n \neq \int f$ (2. ábra (d)):

$$H = [0,2], \qquad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{ha } x \in [0, 1/n) \\ 2n - n^2 x & \text{ha } x \in [1/n, 2/n) \\ 0 & \text{ha } x \in [2/n, 2] \end{cases} \longrightarrow \equiv 0.$$

Ez jó mert $\int_0^2 f_n = (2/n \cdot n)/2 = 1 \not\longrightarrow 0 = \int_0^2 0$.



2. ábra. Konvergens, de nem egyenletesen konvergens függvénysorozatok

2.2. Definíció. f_n egyenletesen tart f-hez ($f_n \xrightarrow{e} f$) H-n ha $(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall x \in H)\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens ha $F_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$ az (jel.: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \stackrel{e}{=} f$).

A különbség a pontonkénti konvergenciához képest az, hogy az utóbbiban $(\forall\epsilon > 0)(\forall x \in H)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$-t követelünk meg, azaz ott N függhet x-től, az egyenletes konvergenciánál nem.

2.3. Következmény. *Ha $f_n \xrightarrow{e} f$ H-n, akkor $f_n \longrightarrow f$ H-n.*

2.4. Állítás. *Ha f_n és f korlátosak a H halmazon, akkor $f_n \xrightarrow{e} f$ H-n $\iff \|f_n - f\| \longrightarrow 0$, ahol tetszőleges H-n korlátos g függvényre $\|g\| = \sup\{|g(x)| : x \in H\}$.*

V.ö. pontsorozatoknak ezzel a tulajdonságával: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(a, a_n) = 0$.

Biz. ($\Rightarrow$) Minden $\epsilon > 0$-ra van olyan N, hogy minden $n > N$-re és $x \in H$-ra $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$; de akkor minden $n > N$-re $\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in H\} < \epsilon$.
($\Leftarrow$) Minden $\epsilon > 0$-ra van olyan N, hogy minden $n > N$-re és $x \in H$-ra $|f_n(x) - f(x)| \le \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in H\} = \|f_n - f\| < \epsilon$.

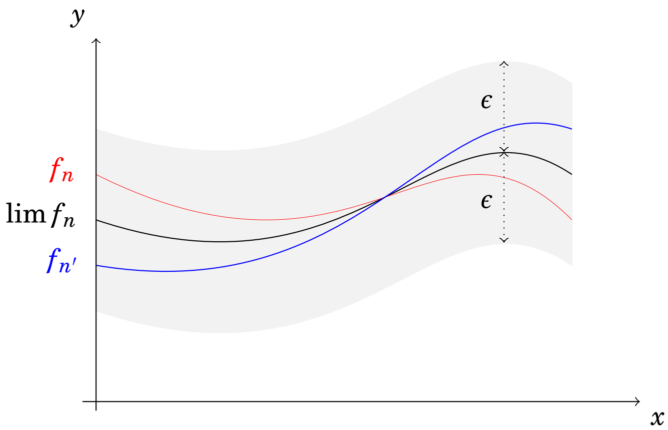
2.5. Megjegyzés. A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon korlátos függvényeken $\|f - g\|$ távolság, ahogyan ezt a fogalmat a többváltozós függvények elején definiáltuk. Az első két tulajdonság (két „pont" – vagyis most két függvény! – távolsága pontosan akkor 0, ha azonosak; és a távolság szimmetrikus) triviálisan igaz rá. De a háromszögegyenlőtlenség is, mert

$$\text{minden } x \in H\text{-ra } |f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \le \|f - h\| + \|h - g\|$$

miatt $\|f - g\| = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in H\} \le \|f - h\| + \|h - g\|$.

□

A fenti példák egyike sem egyenletesen konvergens. Pl. az első: $\epsilon = 1/4$-hez nincs jó N, mert minden n-re $\left|f_n(1/\sqrt[n]{2}) - f(1/\sqrt[n]{2})\right| = f_n(1/\sqrt[n]{2}) = 1/2 > \epsilon$.



3. ábra. Egyenletes konvergencia

2.6. Tétel (egyenletes konvergencia & határérték)**.** *Ha $f_n \xrightarrow{e} f$ H-n, a torlódási pontja H-nak, minden n-re $b_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$, és $L = \lim_{n\to\infty} b_n$, akkor $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Vagyis*

$$\lim_{x\to a}(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

ha a jobboldalon szereplő határértékek léteznek és baloldalon a belső határérték egyenletes.

Valójában (a baloldalon a belső egyenletes határérték létezésén kívül) elég lenne feltenni, hogy a jobboldali belső határértékek léteznek (és így az alábbi következményben sem kell külön feltenni, hogy a $\sum$ konvergens), mert ebből már következik a külső határérték létezése.

Biz. Legyen $\epsilon > 0$; olyan $\delta > 0$ kellene, amire igaz, hogy $(\forall x \in \mathring{S}_\delta(a))\, |f(x) - L| < \epsilon$. $f_n \xrightarrow{e} f$ miatt van olyan N_1, amire $\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{3}$ H-n ha $n > N_1$. $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ miatt van olyan N_2, amire $|b_n - L| < \frac{\epsilon}{3}$, ha $n > N_2$. Rögzítsünk egy $n > \max(N_1, N_2)$-t! $\lim_{x\to a} f_n(x) = b_n$ miatt van olyan $\delta > 0$, amire igaz, hogy $(\forall x \in \mathring{S}_\delta(a))\, |f_n(x) - b_n| < \frac{\epsilon}{3}$. De akkor minden ilyen x-re

$$|f(x) - L| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - b_n + b_n - L| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - L| < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

□

2.7. Következmény. *Ha $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \overset{e}{=} f$ H-n, és a torlódási pontja H-nak , akkor*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x))$$

ha a jobboldalon szereplő határértékek és összeg léteznek.

Valójában az összeg automatikusan létezik, ld. a 2.6 utáni megjegyzést!

Biz. Jelölje F_m a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor m. részletösszegét! Akkor a jobb oldal

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x)) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(\lim_{x\to a} f_n(x)) = \lim_{m\to\infty}(\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{m} f_n(x)) = \lim_{m\to\infty}(\lim_{x\to a} F_m(x))$$

(ahol az első egyenlőségben a numerikus sor összegének definícióját használtuk minden $x \in H$-ra, a másodikbanban pedig a függvényhatárérték és a (véges) összeg felcserélhetőségét) és ez $F_m \xrightarrow{e} f$ és a tétel miatt $= \lim_{x\to a} f(x)$. □

2.8. Tétel (egyenletes konvergencia & folytonosság)**.** *Ha $f_n \xrightarrow{e} f$ H-n és minden n-re f_n folytonos $a \in H$-ban, akkor f folytonos a-ban.*

Biz. Ha a izolált pontja H-nak, akkor nincs mit bizonyítani; különben pedig f_n a-beli folytonossága miatt $\lim_{x\to a} f_n(x) = f(a)$ minden n-re, és $f_n \longrightarrow f$ miatt $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$. Tehát létezik $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ és így 2.6 miatt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. ☐

2.9. Következmény. *Ha minden n-re f_n folytonos $a \in H$-ban, és $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \stackrel{e}{=} f$, akkor f folytonos a-ban.*

Biz. A feltevés (és mert folytonos függvények (véges) összege folytonos) miatt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ részletösszegei folytonosak a-ban, és mivel ezek egyenletesen tartanak f-hez, a tétel miatt f is az. ☐

2.10. Tétel (egyenletes konvergencia & integrálhatóság)**.** *Ha $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$, $f_n \xrightarrow{e} f$, akkor $f \in \mathscr{R}([a,b])$ és $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$.*

2.11. Megjegyzés. V.ö. a (c) példával, ahol a lim nem is integrálható, és a (d)-vel.

Biz. (Csak azé, hogy ha $f \in \mathscr{R}([a,b])$, akkor $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$.) Legyen $\epsilon > 0$, N pedig olyan, hogy $\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{b-a}$ $[a,b]$-n ha $n > N$. Akkor $\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b f - f_n\right| \le \int_a^b |f - f_n| \le \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon$. ☐

2.12. Következmény. *Ha minden n-re $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \stackrel{e}{=} f$, akkor $f \in \mathscr{R}([a,b])$ és $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.*

Biz. A feltevés (és mert $\mathscr{R}([a,b])$ zárt összeadásra) miatt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ részletösszegei integrálhatók $[a,b]$-n; és mivel a részletösszegei egyenletesen tartanak f-hez, a tétel miatt $f \in \mathscr{R}([a,b])$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_a^b f_n = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \sum_{n=0}^{m} f_n = \int_a^b f$$

ahol a második egyenlőségben $\int_a^b$ és (véges) összeg felcserélhetőségét használtuk, a harmadikban pedig a tételt. ☐

Deriválhatóság és egyenletes konvergencia nem ilyen szép: Példa arra, hogy $f_n \xrightarrow{e} f$, f_n deriválható minden n-re, de $f_n' \not\longrightarrow f'$ (sehogy): $f_n(x) = 1/n \sin nx \xrightarrow{e} f \equiv 0$ (mert $|r_n(x)| = |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$ — ld. 2.16(1)-et alább) de $f_n'(x) = 1/n \cos nx \cdot n = \cos nx \not\longrightarrow f' \equiv 0$ (például mert $x = 0$-ban nem). Példa olyanra, hogy az egyenletes lim nem is deriválható: $f_n = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{e} |x|$ (mert, ismét 2.16(1)-et használva, $|r_n(x)| = f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{1/n}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \le \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$).

2.13. Tétel (egyenletes konvergencia & deriválhatóság)**.** *Ha minden n-re f_n deriválható (a,b)-n, $\exists x_0 \in (a,b)\, f_n(x_0)$ konvergens és $f_n' \xrightarrow{e} g$ (a,b)-n, akkor van olyan f, hogy $f_n \xrightarrow{e} f$ és $f' = g$ (a,b)-n.*

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, dashed, "e"] \arrow[d, "'"'] & \exists f \arrow[d, dashed, "'"] \\ f_n' \arrow[r, "e"] & g = f' \end{tikzcd}$$

2.14. Megjegyzés. A $\exists x_0 \in (a,b)\, f_n(x_0)$ konvergens feltétel nem hagyható el, pl. $f_n \equiv n$.

2.15. Következmény. *Ha minden n-re f_n deriválható (a,b)-n, $\exists x_0 \in (a,b)\, \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergens és (a,b)-n $\sum_{n=0}^{\infty} f_n' \stackrel{e}{=} g$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \stackrel{e}{=} f$ és $f' = g$ (a,b)-n.*

Biz. A tételt az $F_m = \sum_{n=0}^{m} f_n$ és $F_m' = \sum_{n=0}^{m} f_n'$ függvénysorozatokra alkalmazva kapjuk az állítást. ☐

2.1. Kritériumok egyenletes konvergenciára

Végig: $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$.

2.16. Tétel. *(1) Ha $(\exists a_n \to 0)(\forall x \in H)\, |r_n(x)| \le a_n$, akkor $f_n \xrightarrow{e} f$ H-n.*

(2) Ha $\exists x_n$ H-beli sorozat, hogy $r_n(x_n) \not\to 0$, akkor $f_n \not\xrightarrow{e} f$ H-n.

Biz. Az első áll triviális az egyenletes konvergencia definíciójából. A második is, mert ha $f_n \xrightarrow{e} f$, akkor $(\forall \epsilon > 0)\exists N(\forall n > N)(\forall x \in H)\, |r_n(x)| < \epsilon$, speciálisan $|r_n(x_n)| < \epsilon$, tehát $|r_n(x_n)|$ (és így $r_n(x_n)$) $\longrightarrow 0$. (Avagy: $|r_n(x_n)| \le \sup_H |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|$ tehát az utóbbi nem tarthat 0-ba.) (Megj.: ettől persze f_n még lehet konvergens: a fenti (b) példában legyen $x_n = 1/(2n)$; akkor $r_n(x_n) = f(x) - f(x_n) = 1 - 1/2 = 1/2 \not\longrightarrow 0$.) □

2.17. Házi feladat. A tétel (2) pontjának segítségével mutassuk meg, hogy a szakasz elején, a pontonkénti konvergencia definíciója utáni négy függvénysorozat egyike sem egyenletesen konvergens.

2.18. Példa. $[0,1]$ mely részhalmazain (egyenletesen) konvergens $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$?

$$f_n \longrightarrow f = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ 1 & \text{ha } x \in (0,1] \end{cases}$$

A konvergencia nem lehet egyenletes, mert a határfüggvény nem folytonos. $(0,1]$-en már folytonos, de ott sem egyenletes a konvergencia, mert $x_n = \frac{1}{n^n} \in (0,1]$, $r_n(x_n) = 1 - f(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \ne 0$. De $\delta > 0$-ra $[\delta, 1]$-en már egyenletes, mert $0 \le r_n(x) = 1 - \sqrt[n]{x} \le 1 - \sqrt[n]{\delta} \to 0$.

2.19. Tétel (Cauchy kritérium függvénysorozat egyenletes konvergenciájára)**.** *$f_n \xrightarrow{e} f$ H-n valamilyen f-re $\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n,m > N)(\forall x \in H)\, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Azaz $\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n,m > N)\, \|f_n - f_m\| < \epsilon$.*

2.20. Következmény (Weierstrass–kritérium függvénysor egyenletes konvergenciájára)**.** *Ha $\forall n (\forall x \in H)\, |f_n(x)| \le a_n$ és $\sum a_n$ konvergens, akkor $\sum f_n$ egyenletesen konvergens H-n.*

Biz. Legyen $F_n(x) = \sum_1^n f_k(x)$. $\epsilon > 0$-ra 1.4 miatt van olyan N, hogy minden $x \in H$-ra és $n > m > N$-re

$$|F_n(x) - F_m(x)| = \left|\sum_{m+1}^n f_k(x)\right| \le \sum_{m+1}^n |f_k(x)| \le \sum_{m+1}^n a_k < \epsilon,$$

vagyis 2.19 szerint a részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens. □

2.21. Példák (Weierstrass–kritérium alkalmazására)**.** 1. Hol (egyenletesen) konvergens $\sum \frac{n^2}{x^4+n^4}$? Weierstrass–kritérium miatt egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, mert majorálja a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens numerikus sor.

2. Hol (egyenletesen) konvergens $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$? Weierstrass–kritérium miatt egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, mert majorálja a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens numerikus sor.

3. $\sum \frac{x^n}{n!}$ egyenletesen konvergens $[-K,K]$-n: $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \le \frac{K^n}{n!}$ és $\sum \frac{K^n}{n!}$ konvergens (hányadoskritérium). Speciel konvergens $\mathbb{R}$-en. De nem egyenletesen, mert a $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ függvénysorozat ugyan $\longrightarrow 0$, de nem egyenletesen, mert $x_n = n$-re $r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{n^n}{n!} \to \infty \ne 0$. Márpedig

2.22. Állítás. *Ha $\sum f_n \overset{e}{=} f$ a H halmazon, akkor $f_n \xrightarrow{e} 0$ H-n (ahol 0 a konstans 0 függvény).*

Biz. $\|f_{n+1}\| = \|F_{n+1} - F_n\| = \|F_{n+1} - f + f - F_n\| \le \|F_{n+1} - f\| + \|f - F_n\| \to 0.$. □

3. Hatványsor

3.1. Definíció. c körüli hatványsor: $\sum a_n(x-c)^n$ (de az egyszerűség kedvéért $c=0$ végig).

3.2. Példák. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mértani sor, tehát tudjuk, hogy pontosan akkor konvergens, ha $|x|<1$ (és azt is, hogy ilyenkor abszolút, és az összege $1/(1-x)$); hol egyenletesen konvergens? Ha $0\le\delta<1$, akkor $[-\delta,\delta]$-n egyenletesen konvergens a Weierstrass–kritérium miatt ($|x^n|\le\delta^n$ és $\sum\delta^n$ konv). De $(-1,1)$-en nem egyenletesen konvergens: $r_n(x)=1/(1-x)-\sum_{k=0}^{n}x^k=1/(1-x)-(1-x^{n+1})/(1-x)=x^{n+1}/(1-x)$; tehát $x_n=-1+\frac{1}{n}$-re $|r_n(x_n)|=\frac{(1-\frac{1}{n})^{n+1}}{2-\frac{1}{n}}\longrightarrow\frac{1}{2e}\ne 0$.

Az, hogy $(-1,1)$-en nem egyenletes a konvergencia, kijön 2.22-ből is: $f_n(x)=x^n$ nem tart egyenletesen a konstans 0 függvényhez, mert $x_n=1-\frac{1}{n}$-re $f_n(x_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{e}\ne 0$ (ld. 2.16(2)!).

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ hol konv? Ha $|x|<1$, akkor igen, sőt, abszolút konvergens mert $\sum|x|^n$ konvergens és majorálja $\sum_{n=1}^{\infty}|x^n/n|$-et; ha $|x|>1$, akkor nem, mert $x^n/n\not\to 0$. Ha $x=1$, akkor divergens (harmonikus sor), ha $x=-1$, akkor konvergens (alternáló harmonikus sor). Tehát a konvergenciaintervallum $[-1,1)$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ konvergenciaintervalluma $[-1,1]$; itt W-kritérium miatt egyenletesen is konvergens, mert $\left|x^n/n^2\right|\le 1/n^2$; amúgy azért nem konvergens, mert $n^2\lhd a^n$ ha $a>1$.

(4) $\sum n!x^n$ 0-n kívül sehol sem konvergens (hányadoskritérium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=|(n+1)x|\to\infty$).

3.3. Tétel. *Legyen $\alpha=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$, $R=1/\alpha$ (értelemszerűen, ha α 0 v. ∞). Ekkor $\sum a_nx^n$ abszolút konvergens ha $|x|<R$, divergens ha $|x|>R$. (R a „konvergenciasugár”.)*

A széleken bármi lehet, a fenti példák közül az első három mindhárom lehetőséget illusztrálja. Mellesleg a tételből látszik, hogy az első három példában miért 1, a negyedikben miért 0 a konvergenciasugár.

Biz. Ha $|x|<R$, akkor

$$\limsup\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}0, \text{ ha } R=\infty, \text{ azaz ha } \limsup\sqrt[n]{|a_n|}=0\\ \frac{1}{R}|x|<\frac{1}{R}\cdot R=1, \text{ ha } R<\infty\end{cases}$$

tehát a gyökkritérium miatt a $\sum a_nx^n$ numerikus sor abszolút konvergens. És ugyanígy, ha $|x|>R$, akkor $\limsup\sqrt[n]{|a_nx^n|}>1$, tehát divergens. □

3.4. Következmény. *Ha $\sum a_nx^n$ konvergenciasugara R, akkor minden $r<R$-re $\sum a_nx^n$ egyenletesen konvergens $[-r,r]$-en.*

Biz. $|a_nx^n|\le|a_n(R-\delta)^n|$ és $\sum|a_n(R-\delta)^n|$ konvergens (mert a konvergenciaintervallum belsejében abszolút a konvergencia), tehát a Weierstrass–kritérium (2.20) miatt kész. □

3.5. Következmény. *Hatványsor a konvergenciaintervallum belsejében levő zárt korlátos intervallumokon tagonként integrálható.*

3.6. Tétel. *Ha $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ konvergenciasugara R, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $|x|<R$-re, akkor f deriválható, és $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ $(-R,R)$-en.*

Vagyis hatványsor a konvergenciaintervalluma belsejében tagonként deriválható.

Biz. Feltehetjük, hogy $R > 0$, mert $R = 0$-ra a tétel konklúziója üresen teljesül. Azt fogjuk belátni, hogy minden $0 < q < R$-re $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ egyenletesen konvergens $(-q,q)$-n. 2.15 miatt ebből, és abból, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergál $x = 0$-ra, következik, hogy $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $(-q,q)$-n, és, mivel ez minden $0 < q < R$-re igaz, $(-R,R)$-en is az, hiszen minden $x \in (-R,R)$-re van olyan $0 < q < R$, hogy $x \in (-q,q)$. Legyen tehát $0 < q < R$, és legyen $r \in (q,R)$; mivel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konvergens, $\lim_n a_n r^n = 0$, tehát valamilyen N indextől kezdve $|a_n r^n| < 1$, azaz $|a_n| < r^{-n}$. De akkor minden $x \in (-q,q)$ és $n > N$-re $\left|n a_n x^{n-1}\right| < n r^{-n} q^{n-1} = q^{-1} n (q/r)^n$, és így, mivel $\sum_{n=0}^{\infty} n(q/r)^n$ a gyökkritérium miatt konvergens numerikus sor, a Weierstrass–kritériumból (2.20) következik, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ egyenletesen konvergens $(-q,q)$-n. □

3.7. Következmény. *A tétel feltételei mellett f akárhányszor deriválható és*

(1) $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$, *speciálisan*

(2) $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$.

3.8. Definíció (Taylor-sor)**.** Az akárhányszor deriválható f függvény c körüli (formális) Taylor-sora: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$, tehát amit a fenti következmény ad. (Ld. alább, hogy ez miért „formális"!) f analitikus c-ben, ha f-et előállítja a Taylor-sora c egy környezetében.

3.9. Tétel (Taylor)**.** *Hatványsor határfüggvényének Taylor-sora maga a hatványsor. Azaz hatványsor határfüggvényének Taylor-sora a konvergenciaintervallumban konvergens és előállítja a függvényt.*

A formális Taylor-sor lehet, hogy csak 0-ban konvergens, az is lehet, hogy konvergens de a $\sum \neq f$ (pl.: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$, mert $f^{(k)}(0) = 0$ minden k-ra (ez nem triviális!)) és persze az is lehet, hogy konvergens és $\sum = f$. Példák utóbbira: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$, $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n!)$. 3.3 segítségével nehéz kiszámolni a konvergenciasugarat (mert kell hozzá, hogy $\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$, ami nem triviális), de hányados-kritériummal könnyű belátni, hogy mindenhol konvergensek. Pl. e^x: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$. Vagy $\sin x$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 0$. Amit még nem tudunk, az az, hogy ezek tényleg elő is állítják-e e^x-et és társait.

3.10. Tétel (Taylor formula Lagrange-féle maradéktaggal)**.** *Legyen f akárhányszor deriválható $(-R,R)$-en, $N \in \mathbb{N}$, $x \in (-R,R)$. Akkor van olyan 0 és x közti ξ, amire $f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$. ($\xi$ x-től és N-től is függ.)*

$N = 0$-ra ez épp a Lagrange középérték–tétel.

3.11. Következmény. *A tétel feltételei mellett, ha $I \subseteq (-R,R)$ és $\exists K > 0$, hogy $\forall n (\forall x \in I) \left|f^{(n)}(x)\right| < K$, akkor a Taylor-sora I-n előállítja f-et.*

Biz. Minden $x \in I$-re $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| = \left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}\right| \leq K \frac{|x^{N+1}|}{(N+1)!} \to 0$ ha $N \to \infty$. □

Pl. $[-R,R]$-en $\exp^{(n)}(x) \leq e^R$. Vagy $\left|\sin^{(n)}(x)\right| \leq 1$. Ezért állítja elő a Taylor-sora e^x-et és $\sin x$-et.

3.12. Példa. $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt$ (ez következik a logaritmus definíciójából: $x > 0$-ra $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, tehát $x > -1$-re a $t+1$ helyettesítéssel $\ln(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{1}{t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt$); $t \in (-1,1)$-re az integrandus egy konvergens geometriai sor összege: $\frac{1}{1+t} = \sum_0^\infty (-t)^n = 1 - t + t^2 - t^3 \pm \ldots$ (bár, ahogy a szakasz elején láttuk, $(0,1)$-en nem egyenletesen).

Tehát ez egy $(-1,1)$-en konvergens hatványsor, következésképp $(-1,1)$ zárt részintervallumain, és így $x \in (-1,1)$-re $[0,x]$-en tagonként integrálható. Vagyis

$$(*)\qquad \ln(1+x) = \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 \pm \ldots \, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$(-1,1)$-en.

A hatványsor konvergenciája egyenletes $[0,1]$-en (a Weierstrass-kritériumból ez nem jön ki, mert $\sum_0^\infty \left|(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right|$-et nem lehet egy konvergens numerikus sorral „majorálni" $[0,1]$-en) mert minden ilyen x-re Leibniz miatt a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke: $|r_n(x)| \le \left|(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1} \to 0$. Ebből 2.16(1) miatt következik az egyenletes konvergencia.

Ez utóbbi miatt, és mert $g(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ és $\ln(1+x)$ megegyeznek $(-1,1)$-en,

$$\ln 2 = \lim_{x\to 1-} \ln(1+x) = \lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\overset{2.7}{=} \sum_0^\infty \lim_{x\to 1-} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$$

[2] vagyis az alternáló harmonikus sor összege $-\ln 2$.

Azt nem tehettük volna meg, hogy 1-et egyszerűen behelyettesítjük $(*)$-ba, mert csak $(-1,1)$-en tudjuk, hogy a sor előállítja $\ln(1+x)$-et.

3.13. Példa. $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$ (ez volt az arctg definíciója); $t \in (-1,1)$-re az integrandus egy konvergens geometriai sor összege: $\frac{1}{1+t^2} = \sum_0^\infty (-t^2)^n = 1 - t^2 + t^4 - t^6 \pm \ldots$. Tehát ez egy $(-1,1)$-en konvergens hatványsor, következésképp $(-1,1)$ zárt részintervallumain, és így $x \in (-1,1)$-re $[0,x]$-en tagonként integrálható. Vagyis

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 \pm \ldots \, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$(-1,1)$-en.

Mint az előző példában: a konvergencia egyenletes $[0,1]$-en (ez sem jön ki a Weierstrass-kritériumból) mert minden ilyen x-re Leibniz miatt a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke: $|r_n(x)| \le \left|(-1)^n \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}\right| \le \frac{1}{2n+1} \to 0$. Ebből 2.16(1) miatt következik az egyenletes konvergencia.

Az előző példához hasonlóan, mivel $\operatorname{arctg} x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1,1)$-en, 1-beli baloldali határértékük is megegyezik, és ezért

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to 1-} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \overset{2.7}{=} \sum_0^\infty \lim_{x\to 1-} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

[2]Vagy 2.7 helyett 2.9-re hivatkozva azt is mondhatjuk, hogy mivel $\ln(1+x)$ és $g(x)$ is folytonos $[0,1]$-en (a hatványsor 2.9 miatt), és megegyeznek $(-1,1)$-en,

$$\ln 2 = \lim_{x\to 1-} \ln(1+x) = \lim_{x\to 1-} g(x) = g(1) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}.$$

És persze itt sem tehettük volna meg, hogy 1-et egyszerűen behelyettesítjük a fentibe, mert csak $(-1,1)$-en tudjuk, hogy a sor előállítja $\operatorname{arctg} x$-et.

3.14. Megjegyzés. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ hatványsora ($\sum_0^\infty x^{2n}$) persze csak $|x|<1$-re konvergens, hiszen f-nek „szingularitása" van 1-ben. De $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ hatványsora ($\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}$) is, pedig annak nincs szingularitása. Valójában dehogynem: $\pm i$-ben, de ez csak komplex függvénytanban fog kiderülni.

3.15. Példák. 1. Legyen $f(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$; $f^{(100)}(0)=?$

MO. 1, mert a sor mindenütt, így az origóban is az e^x-et állítja elő, aminek minden deriváltja önmaga, tehát $f^{(100)}(0)=e^0=1$.

2. Legyen $f(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{n!}$; $f^{(100)}(0)=?$

MO. e^x Taylor–sorából ez a sor mindenütt az e^{x^2}-et állítja elő, így mindenütt konvergens hatványsor, tehát határfüggvényének, $f(x)=e^{x^2}$-nek Taylor–sorában $\frac{1}{50!}=a_{100}=\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$, azaz $f^{(100)}(0)=\frac{100!}{50!}$.

3. Legyen $f(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$; $f^{(100)}(0)=?$

MO. A sor hatványsor, konvergenciaintervallumának belseje ($\limsup \sqrt[n]{n^2}=\lim(\sqrt[n]{n})^2=1$ miatt) a $(-1,1)$ intervallum . Ezért ott a sor saját f összegfüggvényének 0 körüli Taylor–sora, azaz $\frac{1}{n^2}=a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, következésképp $f^{(100)}(0)=\frac{100!}{100^2}=\frac{99!}{100}$.

4. Legyen $f(x)=e^{x^2}$; $f^{(100)}(0)=?$

MO. Ld. a 2. példát!

5. Legyen $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ az origón kívül és $f(0)=1$. Adja meg az $f''(0)$ értékét, ha létezik!

MO. e^x Taylor sora alapján $f(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{(n+1)!}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\dots$ mindenütt konvergens hatványsor határfüggvénye, így mindenütt akárhányszor deriválható és Taylor sora az őt előállító hatványsor. Következésképp $\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{6}$, amiből $f''(0)=\frac{1}{3}$.

6. Legyen minden valós x-re $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Számítsa ki az $F(-1)$, $F(0)$ és $F(1)$ értékeket 1 század pontossággal!

MO. e^x 0 körüli Taylor-sora alapján $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-x^2)^n}{n!}$ mindenütt konvergens hatványsor, tehát tagonként integrálható. Így

$$F(x)=\int_0^x \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t^2)^n}{n!}\,dt=\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n!}\int_0^x t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

Következésképp $F(1)=\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}$, ami Leibniz típusú, így a hiba nem nagyobb, mint az első elhagyott tag abszolút értéke: $|r_n|\le \frac{1}{(2n+1)n!}\le 10^{-2} \rightsquigarrow (2n+1)n!\ge 100 \rightsquigarrow n\ge 4 \rightsquigarrow F(1)\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}=\frac{26}{35}\approx 0.743$. Nyilván $F(0)=0$ és, mivel e^{-x^2} páros, $F(-1)=-F(1)\approx -0.743$.

7. x^4-2x^3+2 1 körüli Taylor-sora.

MO. $f(1)=1$, $f'(x)=4x^3-6x^2$, $f'(1)=-2$, $f^{(2)}(x)=12x^2-12x$, $f^{(2)}(1)=0$, $f^{(3)}(x)=24x-12$, $f^{(3)}(1)=12$, $f^{(4)}(x)=24$, következésképp $f(x)=\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=1-2(x-1)+2(x-1)^3+(x-1)^4$.

4. Fourier

4.1. Állítás. (1) *p periódusú függvényt mindegy melyik p hosszúságú intervallumon integráljuk.*

(2) *Ha f páratlan, akkor* $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

(3) $\int_0^{2\pi} \sin nx = 0$

(4) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$

Biz. 1. Helyettesítéses integrál: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{a+p}^{b+p} f(t-p)\,dt = \int_{a+p}^{b+p} f(t)\,dt$, ahol $u(t) = t - p$.

Következésképp $\int_b^{b+p} f = \int_b^a f + \int_a^{a+p} f + \int_{a+p}^{b+p} f = -\int_a^b f + \int_a^{a+p} f + \int_a^b f = \int_a^{a+p} f$.

2. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(-a)}^{u^{-1}(a)} f(u(t))u'(t)\,dt = \int_a^{-a} -f(-t)\,dt = \int_a^{-a} f(t)\,dt = -\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$, ahol $u(t) = -t$.

3. $\int_0^{2\pi} \sin nx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx = 0$ az előző kettő miatt, mert $\sin nx$ páratlan, és mivel $2\pi/n$ szerint, ezért 2π szerint is periodikus.

4. Mint az előző. □

4.2. Állítás. *Legyen* $n, m \in \mathbb{N}$. *Akkor*

(1) $\int_0^{2\pi} \cos nx = \begin{cases} 0 & ha\ n > 0 \\ 2\pi & ha\ n = 0 \end{cases}$

(2) $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & ha\ n \neq m \\ \pi & ha\ n = m > 0 \\ 2\pi & ha\ n = m = 0 \end{cases}$

(3) $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & ha\ n \neq m\ vagy\ m = n = 0 \\ \pi & ha\ n = m > 0 \end{cases}$

Biz. 1. $\int_0^{2\pi} \cos 0x = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi$ és $\int_0^{2\pi} \cos nx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$ ha $n > 0$.

2, 3. Ha $m = n = 0$, akkor mindkét állítás triviális. Tehát a továbbiakban feltehetjük, hogy $m + n \neq 0$. Tudjuk:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

A kettőt összeadva kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

kivonva meg azt, hogy

$$(**) \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$(*)$ miatt

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \, dx$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x \, dx \begin{cases} \overset{(1)}{=} 0 & \text{ha } n \neq m \\ = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 = \pi & \text{ha } n = m > 0, \end{cases}$$

és $(**)$-ból ugyanígy kijön a 3. □

4.3. Tétel. *Ha* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *egyenletesen, akkor* $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 0x \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx$ *ha* $n > 0$, *és* $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx$.

Biz. $n = 0$-ra:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx + b_m \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx)$$

$$\overset{4.2(1),4.1(3)}{=} a_0 \int_0^{2\pi} \cos 0x \, dx \overset{4.2(1)}{=} a_0 2\pi$$

$n > 0$-ra:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_m \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx)$$

$$\overset{4.2(2),4.1(4)}{=} a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx \overset{4.2(2)}{=} a_n \pi$$

b_n-ek hasonlóan. □

Ha l a félperiódus, akkor a fenti képletekben $\pi \mapsto l$, $n \mapsto n\frac{\pi}{l}$. Pl. $a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos \frac{n\pi}{l}x \, dx$. És a sorfelírásban is: $f(x) = \sum_0^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x)$.

4.4. Definíció. f (formális) Fourier-sora $\sum_0^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, ahol $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx$ ha $n > 0$, és $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx$.

4.5. Megjegyzés. Páros, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sora tiszta cosinuszos ($b_n = 0$), páratlané meg tiszta sinuszos ($a_n = 0$). Ez 4.1(1),(2)-ből következik, mert

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = 0$$

mert $f(x)\sin nx$ páratlan ha f páros, és

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = 0$$

mert $f(x)\cos nx$ páratlan ha f páratlan.

4.6. Definíció. Az f valós függvény szakaszonként folytonos az $[a,b]$ intervallumon, ha $[a,b]$-nek csak véges sok pontjában szakad, de minden szakadása elsőfajú (azaz a szakadási helyeken is vannak féloldali határértékei). f szakaszonként folytonosan deriválható $[a,b]$-n, ha f és f' is szakaszonként folytonos $[a,b]$-n.

4.7. Tétel. *Ha az f periodikus korlátos függvény szakaszonként folytonosan deriválható, akkor a Fourier-sora mindenütt konvergál; a folytonossági helyeken $f(x)$-hez, a szakadási helyeken pedig a féloldali limesek számtani közepéhez: $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$-hoz.*

4.8. Példák. 1. $f(x)=x$ $(-\pi,\pi]$-n, $f(x+2k\pi)=f(x)$, $k\in\mathbb{Z}$.

$a_n=0$, mert páratlan a függvény (elég, hogy $(-\pi,\pi)$-n az, mert az együtthatókat ott számoljuk).

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin nx}_{v'}=\frac{1}{\pi}\Big(x\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx}_{0}\Big)$$
$$=-\frac{1}{n\pi}(\pi\cos n\pi-(-\pi)\cos(n\cdot-\pi))=\frac{-2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

azaz $F(x)=\sum_1^\infty\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$.

2. $f(x)=x^2$ $(0,2\pi]$-n, $f(x+2k\pi)=f(x)$, $k\in\mathbb{Z}$.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2=\frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos nx}_{v'}=\underbrace{\frac{1}{\pi n}x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi}}_{0}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin nx}_{v'}$$
$$=-\frac{2}{\pi n^2}(-x\cos nx)\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos nx}_{0}=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\sin nx}_{v'}=\underbrace{\frac{-1}{\pi n}x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi}}_{-\frac{4\pi}{n}}-\frac{-2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\cos nx$$
$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos nx}_{v'}=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n}\Big(\underbrace{\frac{x\sin x}{n}\Big|_0^{2\pi}}_{0}-\frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos nx}_{0}\Big)=-\frac{4\pi}{n}$$

Azaz:

$$F(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_1^\infty\Big(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\Big)$$

Ebből kiszámolható $\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}$:

U.i. egyrészt $F(0)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_1^\infty\frac{4}{n^2}$. Másrészt $x=0$ szakadási helye f-nek: $\lim_{+0}f=0$, $\lim_{-0}f=(2\pi)^2=4\pi^2$. Tudjuk, hogy ilyenkor $F(0)$ ezek számtani közepe, $2\pi^2$. Tehát $2\pi^2=F(0)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_1^\infty\frac{4}{n^2}$, amiből $\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}(2\pi^2-\frac{4}{3}\pi^2)=\frac{1}{6}\pi^2$.

1.14 ($\Leftarrow$) Ha a_n nem korlátos felülről, akkor van végtelenbe tartó részsorozata.
($\Rightarrow$) Ha K az a_n egy felső korlátja, akkor a minden sűrűsödési értéke $\leq K$, és így $\limsup a_n \leq K < \infty$.

1.16 Ha a_n nem korlátos alulról, akkor mindkét oldal $= -\infty$. Máskülönben $-a_n$ korlátos felülről, következésképp

$$\begin{aligned}\limsup -a_n &= \sup\{\lim -a_{n_k} : -a_{n_k} \text{ konvergens részsorozata } -a_n\text{-nek}\}\\ &= \sup\{-\lim a_{n_k} : a_{n_k} \text{ konvergens részsorozata } a_n\text{-nek}\}\\ &= -\inf\{\lim a_{n_k} : a_{n_k} \text{ konvergens részsorozata } a_n\text{-nek}\} = -\liminf a_n\end{aligned}$$

A második állítás következik az elsőből: $\liminf -a_n = -\limsup - -a_n = -\limsup a_n$.

1.20 Mindkettőt mutatja $a = 1$, $a_n = 1 + 1/n$.

2.17 Például az $1/\sqrt[n]{2}$, $1/2n$, $1/n$, $1/n$ sorozatok mutatják.