MODELLELMÉLET

SIMON ANDRÁS

1. BEVEZETÉS

1.1. Definíció (Beágyazás, részmodell)**.** Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két $\mathcal{L}$-modell. A $h : A \longrightarrow B$ függvény *beágyazása* $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-be ha az alábbi feltételek teljesülnek:

(i) h injektív
(ii) minden $c \in \mathcal{L}$ konstansra $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
(iii) minden $f \in \mathcal{L}$ n-argumentumú függvényjelre és $a_1, \ldots, a_n \in A$-ra
$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(ha_1, \ldots, ha_n)$$
(iv) minden $R \in \mathcal{L}$ n-argumentumú relációjelre és $a_1, \ldots, a_n \in A$-ra
$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} \iff \langle ha_1, \ldots, ha_n \rangle \in R^{\mathcal{B}}.$$

$\mathcal{A}$ *részmodellje* $\mathcal{B}$-nek ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$) ha az identitásfüggvény A-n beágyazása $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-be (azaz: $A \subseteq B$, minden $c \in \mathcal{L}$ konstansra $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$, minden $f \in \mathcal{L}$ n-argumentumú függvényjelre $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}} \restriction A^n$ és minden $R \in \mathcal{L}$ n-argumentumú relációjelre $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n$). A h beágyazás *izomorfizmus*, ha szürjektív.

1.2. Definíció. A $h : A \longrightarrow B$ függvény elemi beágyazása $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-be, ha minden φ formulára és $\mathcal{A}$-hoz tartozó σ kiértékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[\sigma] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ \sigma]$. (Speciel ha $\mathcal{A}$ elemien beágyazható $\mathcal{B}$-be, akkor $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.) $\mathcal{A}$ *elemi részmodellje* $\mathcal{B}$-nek, vagy $\mathcal{B}$ *elemi bővítése* $\mathcal{A}$-nak ($\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$) ha az identitásfüggvény A-n elemi beágyazása $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-be.

1.3. Állítás. *A $h : A \longrightarrow B$ függvény pontosan akkor beágyazása $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-be, ha minden φ atomi formulára és $\mathcal{A}$-hoz tartozó σ kiértékelésre $\mathcal{A} \models \varphi[\sigma] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h \circ \sigma]$. (Speciel ha $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{B}$-be, akkor $\mathcal{A} \equiv_0 \mathcal{B}$, azaz $\mathcal{A}$-ban és $\mathcal{B}$-ben ugyanazok az atomi mondatok igazak.)*

Biz. ($\Rightarrow$) Először term-indukcióval belátjuk, hogy

(1) minden t term-re és $\mathcal{A}$-hoz tartozó σ kiértékelésre $h(t^{\mathcal{A}}[\sigma]) = t^{\mathcal{B}}[h \circ \sigma]$.

Ha t konstansjel, akkor ez 1.1(ii) miatt igaz, ha pedig t az x változó, akkor $h(t^{\mathcal{A}}[\sigma]) = h(\sigma(x)) = (h \circ \sigma)(x) = t^{\mathcal{B}}[h \circ \sigma]$. Tfh. f k-argumentumú függvényjel, és $t_1, \ldots, t_k$-ra igaz (1). Akkor

$$\begin{aligned} h(f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}}[\sigma]) &= h(f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\sigma], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\sigma])) \\ &= f^{\mathcal{B}}(h(t_1^{\mathcal{A}}[\sigma]), \ldots, h(t_n^{\mathcal{A}}[\sigma])) = f^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}[h \circ \sigma], \ldots, t_n^{\mathcal{B}}[h \circ \sigma]) = f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{B}}[h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

A második egyenlőségben 1.1(iii)-at használtuk, a harmadikban az indukciós feltevést.

Ez a jegyzet a T43242 sz. OTKA támogatásával készült. Észrevételeket és javításokat az `asimon@math.bme.hu` címre küldhetsz.

1.1(i) és (1) miatt

$$\mathcal{A} \models t_1 = t_2[\sigma] \iff t_1^{\mathcal{A}}[\sigma] = t_2^{\mathcal{A}}[\sigma] \iff h(t_1^{\mathcal{A}}[\sigma]) = h(t_2^{\mathcal{A}}[\sigma])$$
$$\iff t_1^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma] = t_2^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma] \iff \mathcal{B} \models t_1 = t_2[h\circ\sigma],$$

1.1(iv) és (1) miatt pedig

$$\mathcal{A} \models R(t_1,\dots,t_n)[\sigma] \iff \langle\, t_1^{\mathcal{A}}[\sigma],\dots,t_n^{\mathcal{A}}[\sigma]\,\rangle \in R^{\mathcal{A}} \iff \langle\, h(t_1^{\mathcal{A}}[\sigma]),\dots,h(t_n^{\mathcal{A}}[\sigma])\,\rangle \in R^{\mathcal{B}}$$
$$\iff \langle\, t_1^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma],\dots,t_n^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma]\,\rangle \in R^{\mathcal{B}} \iff \mathcal{B} \models R(t_1,\dots,t_n)[h\circ\sigma].$$

($\Leftarrow$) h injektív, mert ha $a_1 \neq a_2 \in A$ és σ olyan $\mathcal{A}$-hoz tartozó kiértékelés amire $\sigma(x_1) = a_1$ és $\sigma(x_2) = a_2$, akkor $\mathcal{A} \not\models x_1 = x_2[\sigma]$, tehát $\mathcal{B} \not\models x_1 = x_2[h\circ\sigma]$, azaz $h(a_1) = h(\sigma(x_1)) = x_1^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma] \neq x_2^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma] = h(\sigma(x_2)) = h(a_2)$.

Ha c konstansjel és $\sigma(x) = c^{\mathcal{A}}$, akkor $\mathcal{A} \models (c = x)[\sigma]$, tehát $\mathcal{B} \models (c = x)[h\circ\sigma]$, azaz $c^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma] = h(\sigma(x)) = h(c^{\mathcal{A}})$.

Ha f n-argumentumú függvényjel és $f^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n) = a$, akkor legyen σ olyan kiértékelés, amire $\sigma(x_i) = a_i$ és $\sigma(y) = a$. Ezzel a σ-val $\mathcal{A} \models f(x_1,\dots,x_n) = y[\sigma]$, tehát $\mathcal{B} \models f(x_1,\dots,x_n) = y[h\circ\sigma]$, azaz $f^{\mathcal{B}}(h(a_1),\dots,h(a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(\sigma(x_1)),\dots,h(\sigma(x_n))) = f(x_1,\dots,x_n)^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma] = y^{\mathcal{B}}[h\circ\sigma] = h(\sigma(y)) = h(a) = h(f^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n))$.

Végül, ha R n-argumentumú relációjel és $a_1,\dots,a_n \in A$, akkor legyen σ olyan kiértékelés, amire $\sigma(x_i) = a_i$. Ezzel a σ-val $\langle\, a_1,\dots,a_n\,\rangle \in R^{\mathcal{A}} \iff \mathcal{A} \models R(x_1,\dots,x_n)[\sigma] \iff \mathcal{B} \models R(x_1,\dots,x_n)[h\circ\sigma] \iff \langle\, x_1[h\circ\sigma],\dots,x_n[h\circ\sigma]\,\rangle \in R^{\mathcal{B}} \iff \langle\, ha_1,\dots,ha_n\,\rangle \in R^{\mathcal{B}}$. $\square$

1.4. Következmény. *$h : A \longrightarrow B$ pontosan akkor (elemi) beágyazása $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-be, ha minden A-beli véges $\bar{a}$ sorozatra $\langle\, \mathcal{A},\bar{a}\,\rangle \equiv_0 \langle\, \mathcal{B},h\bar{a}\,\rangle$ ($\langle\, \mathcal{A},\bar{a}\,\rangle \equiv \langle\, \mathcal{B},h\bar{a}\,\rangle$).*

Biz. 1.3 és 1.2-ből következik, mert minden $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ formulára és $a_1,\dots,a_n \in A$-ra, ha $c_{a_i}^{\mathcal{A}} = a_i$ és $c_{a_i}^{\mathcal{B}} = h(a_i)$, akkor

$$\mathcal{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)[a_1,\dots,a_n] \iff \langle\, \mathcal{A},a_1,\dots,a_n\,\rangle \models \varphi(c_{a_1}/x_1,\dots,c_{a_n}/x_n) \quad \text{és}$$
$$\mathcal{B} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)[ha_1,\dots,ha_n] \iff \langle\, \mathcal{B},ha_1,\dots,ha_n\,\rangle \models \varphi(c_{a_1}/x_1,\dots,c_{a_n}/x_n).$$ $\square$

1.5. Feladat. A következményben „minden $a_1,\dots,a_n \in A$” helyett mondhattunk volna „minden ismétlésmentes, nem konstans $a_1,\dots,a_n \in A$”-t.

1.6. Feladat. $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ pontosan akkor ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ és minden $a_1,\dots,a_n \in A$-ra és minden $\varphi(x,x_1,\dots,x_n) \in Form_{\mathcal{L}}$-re, ha $\mathcal{B} \models \exists x\varphi(x,x_1,\dots,x_n)[a_1,\dots,a_n]$, akkor van olyan $a \in A$, amire $\mathcal{B} \models \varphi(x,x_1,\dots,x_n)[a,a_1,\dots,a_n]$.

1.7. Feladat. Minden izomorfizmus elemi beágyazás.

1.7 egyik gyakran használt következménye, hogy az automorfizmusok megtarják a formulák jelentését, azaz ha g az $\mathcal{A}$ modell automorfizmusa, akkor $\mathcal{A} \models \varphi[\sigma] \iff \mathcal{A} \models \varphi[g\circ\sigma]$.

1.8. Példa. A valós számok testének szokásos beágyazása a komplex számok testébe beágyazás, de nem elemi (miért?).

1.9. Feladat. Keressünk példát olyan $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ modellekre, amelyekre $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ de $\mathcal{B} \not\preceq \mathcal{A}$.

1.10. Példa. Legyen $\mathcal{L} = \{ c_i : i \in \omega \}$, $\mathcal{A}$ pedig egy olyan $\mathcal{L}$-struktúra, amiben $c_i^{\mathcal{A}} \neq c_j^{\mathcal{A}}$ minden $i \neq j \in \omega$-ra. Akkor $\mathcal{A}$-nak minden részmodellje elemi része is. Ezt 1.6 segítségével fogjuk belátni.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ és $\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[b_1, \ldots, b_n]$, ahol $b_1, \ldots, b_n \in B$, és legyen $a \in A$ ennek egy tanúja. Azt kell megmutatnunk, hogy van olyan $b \in B$ is, amire $\mathcal{A} \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[b, b_1, \ldots, b_n]$. Feltehetjük tehát, hogy $a \notin B$, ami azt is jelenti, hogy a nem konstans, és különbözik $b_1, \ldots, b_n$ mindegyikétől. Legyen b a $B \setminus \{ b_1, \ldots, b_n \}$ egy olyan eleme, ami egy φ-ben nem előforduló c_k konstansjel jelentése, és legyen $\mathcal{L}^- = \mathcal{L} \setminus \{ c_k \}$. A-nak az a g a permutációja, ami a-t és b-t felcseréli, de minden más elemet (tehát b_1, $\ldots, b_n$-t is) helybenhagy, automorfizmusa $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}^-$-nak. 1.7 miatt tehát

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[a, b_1, \ldots, b_n] \\
\iff &\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}^- \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[a, b_1, \ldots, b_n] \\
\iff &\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}^- \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[g(a), b_1, \ldots, b_n] \\
\iff &\mathcal{A} \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[g(a), b_1, \ldots, b_n],
\end{aligned}$$

azaz $\mathcal{A} \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[b, b_1, \ldots, b_n]$.

1.11. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ vektortér végtelen dimenziós altere, akkor $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$. (Egy K test feletti vektorteret úgy célszerű elsőrendű modellként felírni, hogy minden $k \in K$-ra a k-val való szorzást külön egyargumentumú függvénynek tekintjük.)

1.12. Definíció (Modell diagramja)**.** Legyen $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{L}$-struktúra, $X \subseteq A$. Az $\mathcal{L}_X$ nyelv az $\mathcal{L}$-nek az a bővítése, amit úgy kapunk $\mathcal{L}$-ből, hogy minden $a \in X$-re bevezetünk egy új c_a konstansjelet; $\mathcal{A}_X = \langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in X}$ pedig az az $\mathcal{L}_X$ struktúra amiben c_a jelentése a minden $a \in X$-re. $\mathcal{A}$ *diagramja*

$$\operatorname{diag}(\mathcal{A}) = \{ \varphi \in Sent(\mathcal{L}_A) : \varphi \text{ atomi vagy negált atomi és } \mathcal{A}_A \models \varphi \}.$$

$\mathcal{A}$ *elemi diagramja*

$$\operatorname{eldiag}(\mathcal{A}) = \{ \varphi \in Sent(\mathcal{L}_A) : \mathcal{A}_A \models \varphi \} (= \operatorname{Th}(\mathcal{A}_A)).$$

1.13. Lemma (Diagram lemma)**.** *$\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ legyenek $\mathcal{L}$-struktúrák. A $h : A \longrightarrow B$ függvény beágyazás pontosan akkor, ha $\langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A} \models \operatorname{diag}(\mathcal{A})$, és elemi beágyazás pontosan akkor, ha $\langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A} \models \operatorname{eldiag}(\mathcal{A})$.*

$\langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A}$-ban persze c_a jelentése ha.

Biz. 1.4 miatt a $h : A \longrightarrow B$ függvény pontosan akkor (elemi) beágyazás, ha minden A-beli véges $\bar{a}$ sorozatra $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv_0 \langle \mathcal{B}, h\bar{a} \rangle$ ($\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, h\bar{a} \rangle$). Könnyű látni, hogy ez éppen akkor teljesül, ha $\langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in A} \equiv_0 \langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A}$ ($\langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in A} \equiv \langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A}$), ami viszont a $\langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A} \models \operatorname{diag}(\mathcal{A})$ ($\langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A} \models \operatorname{eldiag}(\mathcal{A})$) feltétellel ekvivalens. □

1.14. Következmény. *$\mathcal{A}$ pontosan akkor ágyazható be (elemien) $\mathcal{B}$-be ha $\mathcal{B}$-nek van olyan kiterjesztése, ami modellje* $\operatorname{diag}(\mathcal{A})$*-nak (*$\operatorname{eldiag}(\mathcal{A})$*-nak).*

Biz. ($\Rightarrow$) Ha $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ beágyazás, akkor $\langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A} \models \operatorname{diag}(\mathcal{A})$.

($\Leftarrow$) Ha $\langle \mathcal{B}, b_a \rangle_{a \in A} \models \operatorname{diag}(\mathcal{A})$, akkor a $h : a \mapsto b_a$-val definiált függvény beágyazás, mert $A \longrightarrow B$ függvény és $\langle \mathcal{B}, ha \rangle_{a \in A} = \langle \mathcal{B}, b_a \rangle_{a \in A} \models \operatorname{diag}(\mathcal{A})$.

Az elemi beágyazhatóságra vonatkozó állítás ugyanígy bizonyítható, $\operatorname{diag}(\mathcal{A})$ helyett $\operatorname{eldiag}(\mathcal{A})$-t használva. $\square$

1.15. Feladat*. Minden páronként elemien ekvivalens modelleket tartalmazó halmazhoz van olyan modell, amibe a halmaz összes eleme elemien beágyazható.

1.16. Definíció. $H \subseteq A$-ra $\mathcal{A}$ H által generált részmodellje ($Sg^{\mathcal{A}}(H)$) az $\mathcal{A}$ legszűkebb részmodellje aminek univerzuma tartalmazza H-t.

1.17. Feladat. $H \subseteq A$-ra $Sg^{\mathcal{A}}(H) = \{\, t^{\mathcal{B}} : t$ zárt term $\mathcal{B}$ nyelvében $\}$ ahol $\mathcal{B} = \langle\, \mathcal{A}, a \,\rangle_{a \in H}$.

1.18. Lemma. *$\langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle \equiv_0 \langle\, \mathcal{B}, \bar{b} \,\rangle$ pontosan akkor, ha létezik $h : Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}) \longrightarrow Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b})$ izomorfizmus amire $h\bar{a} = \bar{b}$.*

Biz. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- létezik $h : Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}) \longrightarrow Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b})$ izomorfizmus amire $h\bar{a} = \bar{b}$
- létezik $h : Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}) \longrightarrow Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b})$ beágyazás amire $h\bar{a} = \bar{b}$
- létezik $h : \langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle \longrightarrow \langle\, Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b}), \bar{b} \,\rangle$ beágyazás
- létezik $h : Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}) \longrightarrow Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b})$ függvény, amire $\langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle \models \varphi[\sigma] \iff \langle\, Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b}), \bar{b} \,\rangle \models \varphi[h \circ \sigma]$ minden atomi φ-re és $\langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle$-hoz tartozó σ értékelésre
- $\langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle \models \varphi \iff \langle\, Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b}), \bar{b} \,\rangle \models \varphi$ minden atomi φ mondatra
- $\langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle \models \varphi \iff \langle\, \mathcal{B}, \bar{b} \,\rangle \models \varphi$ minden atomi φ mondatra

Az első ekvivalenciában $\Leftarrow$ azért igaz, mert ha $\bar{b}$ része h képének, akkor az általa generált modell is. A második ekvivalencia triviális, a harmadik 1.3-ból következik. A negyedik ekvivalencia $\Rightarrow$ iránya triviális, $\Leftarrow$ meg a következő miatt igaz: Legyen $h(t^{\mathcal{A}}) = t^{\mathcal{B}}$ minden $\mathcal{L}(\bar{c})$-beli zárt t termre. Ez valóban függvény, mert

$$t^{\mathcal{A}} = s^{\mathcal{A}} \implies \langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle \models t = s \implies \langle\, Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b}), \bar{b} \,\rangle \models t = s \implies t^{\mathcal{B}} = s^{\mathcal{B}}$$

a feltevés miatt, és $Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a})$-ból képez $Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b})$-be 1.17 miatt. Utóbbiból az is következik, hogy minden $\langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle$-beli σ értékelésre van olyan t_i term-sorozat, amire $t_i^{\mathcal{A}} = \sigma(x_i)$, és így $t_i^{\mathcal{B}} = h(t_i^{\mathcal{A}}) = h(\sigma(x_i))$; de akkor

$$\begin{aligned} \langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle \models \varphi[\sigma] &\iff \langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle \models \varphi(t_i/x_i) \\ &\iff \langle\, Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b}), \bar{b} \,\rangle \models \varphi(t_i/x_i) \iff \langle\, Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b}), \bar{b} \,\rangle \models \varphi[h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

Végül az utolsó ekvivalencia megintcsak 1.3 miatt igaz, hiszen $\langle\, Sg^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a} \,\rangle \subseteq \langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle$ és $\langle\, Sg^{\mathcal{B}}(\bar{b}), \bar{b} \,\rangle \subseteq \langle\, \mathcal{B}, \bar{b} \,\rangle$. $\square$

Kanonikus modell Tartalmazzon az $\mathcal{L}$ nyelv legalább egy konstansjelet, és legyen T egy konzisztens $\mathcal{L}$-elmélet. Jelölje $\mathcal{T}$ az $\mathcal{L}$-beli zárt termek halmazát, és $s, t \in \mathcal{T}$-re legyen $s \sim t \iff T \models s = t$. $\sim$ ekvivalencia-reláció $\mathcal{T}$-n (T minden modelljében igaz $t = t$, tehát $t \sim t$; ha $s \sim t$, akkor T minden modelljében igaz $s = t$ tehát $t = s$ is, ezért $t \sim s$; tranzitivitás bizonyítása ugyanígy megy). Definiáljuk $\mathcal{A}_T$-t (T kanonikus modelljét) a következő módon. $\mathcal{A}_T$ univerzuma legyen $\mathcal{T}/\sim$. Ha $R \in \mathcal{L}$ n-ér relációjel, akkor

$$\langle\, t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim \,\rangle \in R^{\mathcal{A}_T} \iff T \models R(t_1, \ldots, t_n)$$

Ez jó definíció, mert ha $t_i' \sim t_i$ ($1 \leq i \leq n$), akkor $T \models R(t_1, \ldots, t_n) \iff T \models R(t_1', \ldots, t_n')$. Minden $c \in \mathcal{L}$ konstansjelre

$$c^{\mathcal{A}_T} = c/\sim$$

és ha $f \in \mathcal{L}$ n-argumentumú függvényjel, akkor

$$f^{\mathcal{A}_T}(t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim) = f(t_1, \ldots, t_n)/\sim$$

Könnyű látni, hogy ezek is jó definíciók, hogy $f^{\mathcal{A}_T}$ valóban függvény, és hogy minden t zárt termre $t^{\mathcal{A}_T} = t/\sim$. (Ha $\mathcal{L}$ nem tartalmaz relációjeleket, akkor $\mathcal{A}_T$ nem más, mint a T által definiált algebraosztály szabad algebrája (annyi generátoron, ahány konstansjel van a nyelvben)).

1.19. Állítás. *Ha T teljes és konzisztens $\mathcal{L}$-elmélet, $\mathcal{L}$ tartalmaz konstansokat és T-re igaz, hogy*

(1) *ha $T \models \exists x \psi(x)$, akkor van olyan t zárt term, amire $T \models \psi(t)$*

akkor $\mathcal{A}_T \models T$.

Biz. Azt fogjuk belátni, hogy minden $\varphi \in Sent(\mathcal{L})$-re

$$T \models \varphi \iff \mathcal{A}_T \models \varphi$$

mégpedig indukcióval az $\mathcal{L}$-mondatokra.

Ha φ atomi, akkor vagy $s = t$, vagy $R(t_1, \ldots, t_n)$ alakú, ahol s, t, t_i zárt termek. Az első esetben

$$T \models s = t \iff s \sim t \iff s^{\mathcal{A}_T} = s/\sim = t/\sim = t^{\mathcal{A}_T} \iff \mathcal{A}_T \models s = t,$$

a másodikban

$$T \models R(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle t_1^{\mathcal{A}_T}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}_T} \rangle = \langle t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim \rangle \in R^{\mathcal{A}_T} \iff \mathcal{A}_T \models R(t_1, \ldots, t_n).$$

Ha $\varphi = \neg\psi$, akkor

$$T \models \neg\psi \iff T \not\models \psi \iff \mathcal{A}_T \not\models \psi \iff \mathcal{A}_T \models \neg\psi$$

T teljessége és az indukciós feltevés miatt; ha pedig $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, akkor

$$T \models \psi_1 \wedge \psi_2 \iff T \models \psi_1 \quad \text{és} \quad T \models \psi_2 \iff \mathcal{A}_T \models \psi_1 \quad \text{és} \quad \mathcal{A}_T \models \psi_2 \iff \mathcal{A}_T \models \psi_1 \wedge \psi_2$$

az indukciós feltevés miatt.

Végül ha $\varphi = \exists x \psi(x)$, akkor

$$\begin{aligned} T \models \exists x \psi(x) &\iff \text{van olyan } t \text{ zárt term amire } T \models \psi(t) \\ &\iff \text{van olyan } t \text{ zárt term amire } \mathcal{A}_T \models \psi(t) \iff \mathcal{A}_T \models \exists x \psi(x) \end{aligned}$$

(1), az indukciós feltevés, és amiatt, hogy $\mathcal{A}_T$ univerzuma a zárt termek ekvivalencia-osztályaiból áll: utóbbiból következik az utolsó ekvivalencia jobbról balra iránya (a másik irány triviális). □

1.20. Tétel (Kompaktsági tétel). *A Σ mondathalmaznak pontosan akkor van modellje, ha minden véges részének van modellje.*

1.21. Tétel (Löwenheim-Skolem tétel). *Ha T-nek van végtelen modellje, akkor minden $\lambda \geq |\mathcal{L}|$-re van λ számosságú modellje, ahol $\mathcal{L}$ a T nyelve.*

A $T = \{\forall xy(x = y)\}$ elmélet mutatja, hogy a „van végtelen modellje” feltétel nem hagyható el.

1.22. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ végtelen modell, akkor minden $\lambda \geq \max(|\mathcal{L}|, |A|)$-ra van λ számosságú elemi bővítése.*

Biz. eldiag$(\mathcal{A})$-nak van végtelen modellje ($\mathcal{A}_A$), tehát Löwenheim-Skolem miatt van λ számosságú $\mathcal{B}$ modellje. De akkor 1.14 miatt $\mathcal{A}$ elemien beágyazható $\mathcal{B} \restriction \mathcal{L}$-be. □

1.23. Tétel (Łos-Vaught teszt). *Ha a T elméletnek csak végtelen modelljei vannak és T λ-kategorikus valamilyen $\lambda \geq |\mathcal{L}|$-re, akkor T teljes.*

Biz. Ha T inkonzisztens, akkor persze teljes is (bármely két modellje elemien ekvivalens). Máskülönben legyen $\mathcal{A}$ T egyetlen λ számosságú modellje: mivel véges modellje nincs, de konzisztens, ezért a Löwenheim-Skolem tétel miatt van ilyen, és a λ-kategoricitás miatt csak egy. Ugyanezért $\mathcal{A}$ modellje T bármely konzisztens bővítésének is. Tehát ha $\varphi \in Sent(\mathcal{L})$, akkor nem lehet $T \cup \{\varphi\}$ és $T \cup \{\neg\varphi\}$ is konzisztens, mert akkor $\mathcal{A}$ φ-nek és $\neg\varphi$-nek is modellje lenne. Következésképp $T \models \neg\varphi$ vagy $T \models \varphi$. □

Vegyük észre, hogy a bizonyítás szinte szó szerint átmegy a gyengébb, „van olyan $\lambda \geq |\mathcal{L}|$, amire T bármely két λ számosságú modellje elemien ekvivalens” feltétellel is.

2. Típusok

2.1. Definíció (Típus I). A $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ formulahalmaz konzisztens (a T elmélettel), ha van olyan $\mathcal{A}$ modell ($\in \mathrm{Mod}(T)$) és $a_1, \dots, a_n \in A$, amire $\mathcal{A} \models \Gamma(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $a_1, \dots, a_n$ megvalósítja $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$-t $\mathcal{A}$-ban. $\mathcal{A}$ megvalósítja $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$-t, ha van olyan $\mathcal{A}$-beli $a_1, \dots, a_n$ ami megvalósítja $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$-t; ellenkező esetben $\mathcal{A}$ elkerüli (elhagyja) $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$-t. $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ típus (T egy típusa) ha maximálisan konzisztens (T-vel). $S_n(T)$ jelöli T n-változós típusainak halmazát.

Típusokat időnként majd a $p, q, \dots$ betűkkel is jelöljük, később ki fog derülni, hogy miért. Példa típusra: $tp_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = \{\varphi(x_1, \dots, x_n) : \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$, ahol $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$. Ez valóban maximálisan konzisztens, mert ha $\psi(x_1, \dots, x_n) \notin tp_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$, akkor $\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1, \dots, a_n)$, azaz $\neg\psi \in tp_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$. Neve: „$a_1, \dots, a_n$ típusa $\mathcal{A}$-ban”. Tehát: $\Gamma(\bar{x})$ pontosan akkor típusa T-nek, ha van olyan $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(T)$ és $\bar{a} \in A$, hogy $\Gamma = tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$ (és $\Gamma(\bar{x})$ konzisztens T-vel pontosan akkor, ha van olyan $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(T)$ és $\bar{a} \in A$, hogy $\Gamma \subseteq tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$).

2.2. *Megjegyzés.* Amikor típusokról beszélünk, nem különböztetünk meg két típust, amik csak a változók neveiben különböznek; azaz valójában típusok ekvivalencia-osztályairól van szó.[1] Tehát $\Gamma(x)$ és $\Gamma(y) = \{\varphi(y/x) : \varphi(x) \in \Gamma(x)\}$ ugyanaz a típus. Itt $\varphi(y/x)$ olyan formula, amit úgy kapunk $\varphi(x)$-ből, hogy x szabad előfordulásait kicseréljük y-ra, ha szükséges, a kötött változók átnevezésével.

[1] Az (amúgy teljesen járható) alternatíva az lenne, hogy $S_n(T)$ helyett $S_{x_1,\dots,x_n}(T)$-ket írunk.

2.3. Feladat. $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle \iff tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = tp_{\mathcal{B}}(\bar{b})$

2.4. Feladat. Ha $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ és $\bar{a} \in A$, akkor $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = tp_{\mathcal{B}}(\bar{a})$.

2.5. Példák. Rendezett test pontosan akkor Archimedeszi, ha elkerüli a $\{ 0 < x, 1 < x, \dots \}$ formulahalmazt. Egy egyetlen, unér függvényjelet tartalmazó nyelv modellje lokálisan véges pontosan akkor, ha elkerüli az $\{ f^i(x) \neq f^j(x) : i, j \in \omega, i \neq j \}$ halmazt.

2.6. Feladat*. Ha $\mathcal{L}$ csak véges sok függvényjelet és konstanst tartalmaz, akkor minden $n \in \omega$-ra van olyan $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ formulahalmaz, amit pontosan akkor kerül el egy modell, ha minden n-elemű részhalmaza véges részmodellt generál. Hasonló feltételek mellett igaz-e, hogy van olyan $\Gamma(\bar{x})$ amit pontosan akkor kerül el egy modell, ha lokálisan véges?

Azt a kérdést, hogy mikor van egy elméletnek Γ-t megvalósító modellje, a kompaktsági tétel megválaszolja:

2.7. Tétel. *Legyen T egy elmélet, $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ formulahalmaz T nyelvén. Az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) *T-nek van Γ-t megvalósító modellje*
(ii) *Γ konzisztens T-vel*
(iii) *Γ minden véges része konzisztens T-vel*
(iv) *$T \cup \{ \exists x_1, \dots, x_n (\gamma_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge \gamma_r(x_1, \dots, x_n)) \}$ konzisztens minden $r \in \omega$, $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$-ra*

Biz. Az első és az utolsó állításpárok definíció szerint ekvivalensek, és a másodikból nyilván következik a harmadik. A harmadikból viszont következik a második a kompaktsági tételt a $T \cup \Gamma(c_1, \dots, c_n)$ mondathalmazra alkalmazva, ahol $c_1, \dots, c_n$ új konstansok. □

2.8. Állítás. *Ha T-nek van Γ-t megvalósító végtelen modellje, akkor minden $\lambda \geq |\mathcal{L}|$-re van λ számosságú Γ-t megvalósító modellje.*

Biz. Löwenheim-Skolem tétel a $T \cup \Gamma(c_1, \dots, c_n)$ mondathalmazra alkalmazva, ahol $c_1, \dots, c_n$ új konstansok. □

2.9. Állítás. *$\Gamma(\bar{x})$ pontosan akkor konzisztens $\mathrm{Th}\,\mathcal{A}$-val, ha $\mathcal{A}$ megvalósítja Γ minden véges részét.*

Biz. ($\Leftarrow$) 2.7 miatt, hiszen ha $\mathcal{A}$ megvalósítja Γ minden véges részét, akkor speciel Γ minden véges része konzisztens $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$-val.

($\Rightarrow$) Ha $\Gamma(\bar{x})$ konzisztens $\mathrm{Th}\,\mathcal{A}$-val, akkor 2.7 miatt $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \{ \exists \bar{x} (\gamma_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \gamma_r(\bar{x})) \}$ konzisztens minden $r \in \omega$, $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$-ra. De $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ teljes elmélet, tehát ebből $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \models \exists \bar{x} (\gamma_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \gamma_r(\bar{x}))$ következik minden $r \in \omega$, $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$-ra, azaz $\mathcal{A}$ megvalósítja $\{ \gamma_1, \dots, \gamma_r \}$-t. □

Abból, hogy $\Gamma(\bar{x})$ konzisztens $\mathrm{Th}\,\mathcal{A}$-val, nem következik, hogy $\mathcal{A}$ meg is valósítja:

2.10. Példa. Legyen $\mathcal{L} = \{ c_i : i \in \omega \}$, $\mathcal{A}$ pedig az az $\mathcal{L}$-struktúra, amiben $c_i^{\mathcal{A}} \neq c_j^{\mathcal{A}}$ minden $i \neq j \in \omega$-ra, és aminek minden elemét megnevezi valamelyik konstans (v.ö. 1.10). Akkor $\Gamma(x) = \{ x \neq c_i : i \in \omega \}$ konzisztens $\mathrm{Th}\,\mathcal{A}$-val mert minden véges része megvalósul $\mathcal{A}$-ban, de $\mathcal{A}$ elkerüli.

2.11. Állítás. *Ha $\mathcal{A}$ véges, akkor Γ pontosan akkor konzisztens $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$-val, ha Γ megvalósul $\mathcal{A}$-ban.*

Biz. 2.9 miatt Γ pontosan akkor konzisztens $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$-val, ha $\mathcal{A}$ megvalósítja Γ minden véges részét. Ez viszont pontosan akkor áll, ha $\mathcal{A}$ megvalósítja Γ-t, mert $\mathcal{A}$-beli ekvivalencia erejéig Γ véges. (Ha $|A| = k$, akkor legfeljebb 2^{k^n} db. páronként $\mathcal{A}$ szerint nem ekvivalens $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ formula van.) $\square$

2.12. Feladat*. $\Gamma(\bar{x})$ pontosan akkor konzisztens $\mathrm{Th}\,\mathcal{A}$-val, ha van olyan $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$ ami megvalósítja. $\mathcal{B}$ választható úgy, hogy $|B| \leq |A| + |\mathcal{L}|$.

2.13. Feladat. $\Gamma(\bar{x})$ típusa T-nek pontosan akkor, ha

(i) $\varphi(\bar{x}) \in \Gamma(\bar{x})$ és $T \models \varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})$-ből $\psi(\bar{x}) \in \Gamma(\bar{x})$ következik

(ii) Γ zárt $\wedge$-re

(iii) minden $\varphi(\bar{x})$ formulára $\varphi(\bar{x})$ és $\neg\varphi(\bar{x})$ közül pontosan egy $\in \Gamma(\bar{x})$.

2.14. Definíció (Típus II)**.** T lokálisan megvalósítja $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$-t, ha van olyan T-vel konzisztens $\theta(x_1, \dots, x_n)$ formula, hogy $T \models \theta(x_1, \dots, x_n) \to \varphi(x_1, \dots, x_n)$ minden $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma(x_1, \dots, x_n)$-re. Ellenkező esetben T lokálisan elkerüli (elhagyja) $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$-t.

2.15. Feladat. Legyen $\Gamma(\bar{x}) \in S_n(T)$. Akkor θ konzisztens T-vel és $T \models \theta(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})$ minden $\varphi(\bar{x}) \in \Gamma(\bar{x})$-re pontosan akkor, ha $\Gamma(\bar{x}) = \{ \varphi(\bar{x}) : T \models \theta \to \varphi \}$.

Ha T teljes és a Γ-t a fenti értelemben „generáló” θ konzisztens T-vel (azaz $T \cup \{ \exists x_1, \dots, x_n \theta(x_1, \dots, x_n) \}$ konzisztens), akkor $T \models \exists x_1, \dots, x_n \theta(x_1, \dots, x_n)$ és így T minden modellje megvalósítja $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$-t. A következő tétel azt mondja, hogy ez megfordítható (és ehhez T-nek nem is kell teljesnek lennie).

2.16. Tétel (Típuselkerülési tétel)**.** *Ha a konzisztens T elmélet nyelve legfeljebb megszámlálható, és T lokálisan elkerüli a $\Gamma_m(x_1, \dots, x_{n_m})$ $(m \in \omega)$ formulahalmazokat, akkor T-nek van olyan megszámlálható modellje, ami mindegyik Γ_m-et elkerüli.*

Biz. Legyen $\mathcal{L}$ a T nyelve, $\mathcal{L}^+$ pedig $\mathcal{L}$ bővítése végtelen sok (c_i, $i \in \omega$) új konstanssal. Csinálunk egy $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$ véges elméletsorozatot a bővített nyelvben úgy, hogy $T^+ = T \cup \bigcup \{ T_i : i \in \omega \}$ konzisztens, és van olyan modellje, aminek $\mathcal{L}$-reduktuma a kívánt tulajdonságú.

T^+-szal szemben egy plusz kétszer végtelen elvárásunk van:

(1) minden $\varphi \in Sent(\mathcal{L}^+)$-ra φ és $\neg\varphi$ valamelyike T^+-beli

($2_{\varphi(x)}$) ha $\exists x \varphi(x) \in T^+$, akkor $\varphi(c) \in T^+$ végtelen sok új konstansra

(3_m) minden $c_1, \dots, c_{n_m}$ ismétlésmentes (új) konstans-sorozatra van olyan $\gamma(x_1, \dots, x_{n_m}) \in \Gamma_m$, amire $\neg\gamma(c_1, \dots, c_{n_m}) \in T^+$.

Ha ezeket mind ki tudjuk elégíteni, akkor T^+ kanonikus modelljének $\mathcal{L}$-reduktuma jó lesz. Egyrészt (1), (2) és 1.19 miatt ez modellje $T \subseteq T^+$-nak, és megszámlálható, mert $\mathcal{L}^+$ az. Minden zárt t termre a $\exists x(x = t)$ mondat konzisztens T^+-al, így (1) miatt eleme is, tehát (2) szerint a modell minden elemét megnevezi végtelen sok új konstans. Következésképp minden véges sorozatot megnevez egy ismétlésmentes új konstans-sorozat. (3) szerint tehát ez a modell elkerüli az összes Γ_m-et.

Ezeket a követelményeket úgy fogjuk kielégíteni, hogy mindegyikre egy szakértőt bérlünk fel. Nevezetesen: felbontjuk ω-t megszámlálható sok diszjunkt végtelen részre, és ezeket elosztjuk a szakértők között. A munka a következőképpen folyik. Ha T_{i-1} már kész, akkor odaadjuk annak a szakértőnek, akinek a halmazában i szerepel, és ő fogja T_i-t előállítani. Egyetlen extra elvárásunk, hogy minden szakértő olyan véges elméletet adjon ki a kezéből, ami konzisztens T-vel. Az egyszerűség kedvéért legyen $T_{-1} = \emptyset$. Most megadjuk a szakértők munkaköri leírását.

(1) még a munka megkezdése előtt felsorolja az $\mathcal{L}^+$-mondatokat ekként: $\{ \varphi_i : i \in X \}$, ahol X ω-nak a számára kijelölt része. Aztán mindig amikor megkapja T_{i-1}-et (mert $i \in X$), megnézi, hogy φ_i vagy $\neg\varphi_i$ szerepel-e T_{i-1}-ben. Ha igen, nem tesz semmit (azaz $T_i = T_{i-1}$), ellenkező esetben veszi $T \cup T_{i-1}$ egy modelljét, és ha abban φ_i igaz, akkor őt, ha nem, akkor $\neg\varphi_i$-t teszi T_i-be.

Ahányszor rákerül a sor, $(2_{\varphi(x)})$ mindig megnézi, hogy $\exists x\varphi(x)$ szerepel-e $T \cup T_{i-1}$-ben. Ha nem, nem csinál semmit, de ha igen, akkor választ $\mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}$-ből egy olyan c konstanst, ami nem fordul elő T_{i-1}-ben (ezt megteheti, mert T_{i-1} véges), és beteszi $\varphi(c)$-t T_i-be. Ezzel $T \cup T_i$ konzisztens lesz, mert $T \cup T_{i-1}$ bármely modellje könnyedén $T \cup T_i$ modelljévé tehető. Mivel $(2_{\varphi(x)})$-re is végtelen sokszor kerül sor, a végső elméletben (T^+-ban) végtelen sok „tanúja” lesz $\exists x\varphi(x)$-nek.

(3_m)-nek is van egy feladata még a munka megkezdése előtt: felsorolja az $\mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}$-beli konstansokból álló ismétlésmentes $n = n_m$-sorozatokat $\{ \bar{c}_i : i \in X \}$-ként, ahol X ω-nak a számára kijelölt része. Ha $i \in X$ kerül sorra, azaz (3_m) megkapja T_{i-1}-et, akkor felírja $\bigwedge T_{i-1}$-et $\chi(\bar{c}, \bar{d})$ alakban, ahol $\bar{c} \subseteq \bar{c}_i$, $\bar{d}$ a T_{i-1}-ben szereplő, $\bar{c}_i$ elemeitől különböző $\mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}$-beli konstansok, és $\chi(\bar{x}, \bar{y}) \in Form(\mathcal{L})$ ($\bar{x} \subseteq x_1, \ldots, x_n$[2]). $\chi(\bar{x}, \bar{y})$ és így $\exists\bar{y}\chi(\bar{x}, \bar{y})$ is konzisztens T-vel, tehát nem „generálhatja” Γ_m-et, azaz van olyan $\gamma(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_m$ amire $T \not\models \forall x_1, \ldots, x_n(\exists\bar{y}\chi(\bar{x}, \bar{y}) \to \gamma(x_1, \ldots, x_n))$, vagyis amire $T \cup \{ \exists\bar{y}\chi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \neg\gamma(x_1, \ldots, x_n) \}$ konzisztens. De akkor $T \cup \{ \chi(\bar{c}, \bar{d}) \wedge \neg\gamma(\bar{c}_i) \}$ is, azaz T_i-nek választhatja $T_{i-1} \cup \{ \neg\gamma(\bar{c}_i) \}$-t. $\square$

A típuselkerülési tétel nem igaz nem megszámlálható nyelvekre, amint azt a következő példa mutatja.

2.17. Példa. Legyen $\mathcal{L} = \{ c_i : i < \lambda \} \cup \{ d_i : i < \omega \}$, ahol λ tetszőleges, ω-nál nagyobb számosság, és legyen $T = \{ c_i \neq c_j : i, j < \lambda, i \neq j \}$. T-nek nincs a $\Gamma(x) = \{ x \neq d_i : i < \omega \}$ formulahalmazt elkerülő modellje (mert T minden modellje $\lambda > \omega$ számosságú), noha T lokálisan elkerüli Γ-t: ha ui. $\varphi(x)$ konzisztens T-vel és $i < \omega$ olyan, hogy d_i nem fordul elő φ-ben, akkor $T \not\models \forall x(\varphi(x) \to x \neq d_i)$, máskülönben, mivel d_i T-ben sem fordul elő, $T \models \forall xy(\varphi(x) \to x \neq y)$, amiből $T \models \neg\exists x\varphi(x)$ következne, ellentmondva φ konzisztenciájának.

3. Atomi modellek

3.1. Definíció. Atomi egy $\mathcal{A}$ modell, ha minden $\bar{a} \in A$-ra $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$ principális, azaz van olyan $\varphi(\bar{x}) \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$ formula amire $\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi \to \psi)$ minden $\psi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-ra.

3.2. Feladat. Legyen $\mathcal{A}$ egy modell és $\bar{a} \in A^n$. Akkor $\varphi(\bar{x}) \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$ és $\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi \to \psi)$ minden $\psi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-ra pontosan akkor, ha $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = \{ \psi(\bar{x}) : \mathcal{A} \models \varphi \to \psi \}$.

[2] Ha igazán precízek akarnánk lenni, azt mondanánk, hogy $\bar{c}_i = c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}$ és $\bar{x}$ az olyan x_j-ket tartalmazza, akikre $c_{i_j} \in \bar{c}$, mégpedig a megfelelő sorrendben. Így azonban ezt csak gondoljuk.

3.3. Példa. Minden véges modell atomi, mert ha $\mathcal{A}$ véges, akkor $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-ban csak véges sok $\mathcal{A}$ szerint nem-ekvivalens formula van (ld. 2.11 bizonyítását), és ezek konjunkciója generálja $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-t.

3.4. Példa. Ha $\mathcal{A}$-ban minden elemet megnevez egy term, akkor $\mathcal{A}$ atomi, mert ha $t_i^{\mathcal{A}} = a_i$, akkor a $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge x_n = t_n$ formula generálja $tp_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$-t, mert $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ csak azon σ értékelések mellett igaz $\mathcal{A}$-ban, amikre $\sigma(x_i) = a_i$ ha $1 \leq i \leq n$, azaz $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \models \psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$.

3.5. Példa. Legyen $\mathcal{L}$ az üres nyelv és $\mathcal{A}$ egy tetszőleges $\mathcal{L}$-modell. Akkor $\mathcal{A}$ atomi, mert $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n \in A$-ra $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge\{\, x_i = x_j : a_i = a_j, 1 \leq i, j \leq n \,\} \wedge \bigwedge\{\, \neg x_i = x_j : a_i \neq a_j, 1 \leq i, j \leq n \,\}$ generálja $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-t. Az ugyanis világos, hogy $\varphi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$; és ha $\psi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, akkor $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi$, mert ha $\bar{b} = b_1, \ldots, b_n \in A$ és $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{x})[\bar{b}]$, akkor $\mathcal{A}$-nak van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő h automorfizmusa, $\mathcal{A} \models \psi(\bar{x})[\bar{a}]$ miatt tehát $\mathcal{A} \models \psi(\bar{x})[\bar{b}]$.

3.6. Példa. Minden végpontok nélküli sűrű rendezés atomi: $a_1, \ldots, a_n$ típusát generálja az $\bigwedge\{\, x_i < x_j : a_i < a_j, 1 \leq i, j \leq n \,\} \wedge \bigwedge\{\, x_i = x_j : a_i = a_j, 1 \leq i, j \leq n \,\}$ formula, bár ezt még nem tudjuk bizonyítani. (3.9(iii)-ból és abból következik, hogy minden parciális automorfizmus kiterjeszthető automorfizmussá.)

3.7. Állítás. *Ha $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, $\varphi(\bar{x})$ generálja $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-t és $\varphi(\bar{x}) \in tp_{\mathcal{B}}(\bar{b})$, akkor $\varphi(\bar{x})$ generálja $tp_{\mathcal{B}}(\bar{b})$-t. Speciálisan ilyenkor $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = tp_{\mathcal{B}}(\bar{b})$.*

Biz. $\varphi(\bar{x}) \in tp_{\mathcal{B}}(\bar{b})$ miatt csak azt kell belátnunk, hogy $\mathcal{B} \models \varphi \to \psi$ minden $\psi(\bar{x}) \in tp_{\mathcal{B}}(\bar{b})$-re. De ha ψ ilyen, akkor $\mathcal{B} \not\models \varphi \to \neg\psi$ (hiszen $\mathcal{B} \models \varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})[\bar{b}]$), tehát $\mathcal{A} \not\models \varphi \to \neg\psi$, azaz $\neg\psi \notin tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$. De akkor $\psi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, tehát $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi$ és így $\mathcal{B} \models \varphi \to \psi$. ☐

3.8. Példa. *Megszámlálható sok független unér reláció elmélete.* $\mathcal{L} = \{\, P_i : i \in \omega \,\}$, az axiómák pedig

$$\rho_{I,J} = \exists x(\bigwedge_{i \in I} P_i(x) \wedge \bigwedge_{i \in J} \neg P_i(x))$$

minden diszjunkt $I, J \subseteq_\omega \omega$-ra.

T konzisztens, mert $\langle\, \omega, \{\, n \in \omega : p_i | n \,\} \,\rangle_{i \in \omega} \models T$, ahol p_i az i. prím. De T-nek nincs atomi modellje. U.i. legyen $a \in \mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(T)$ és tegyük fel, hogy $\varphi(x)$ generálja $tp_{\mathcal{A}}(a)$-t. Ha P_k nem fordul elő $\varphi(x)$-ben, akkor lesz olyan $\varphi(x)$-et kielégítő $b \in A$, amire $\mathcal{A} \models \neg P_k(x)[b]$ (ha $\mathcal{A} \models P_k(x)[a]$) vagy $\mathcal{A} \models P_k(x)[b]$ (ha $\mathcal{A} \models \neg P_k(x)[a]$). Mert legyen I a φ-ben előforduló P_i-k indexeinek halmaza, és $I = I_1 \dot\cup I_2$ úgy, hogy $\mathcal{A} \models \bigwedge_{i \in I_1} P_i(x) \wedge \bigwedge_{i \in I_2} \neg P_i(x)[a]$. Ha $\mathcal{A} \models P_k(x)[a]$, akkor $\rho_{I_1, I_2 \cup \{\, k \,\}}$, ellenkező esetben pedig $\rho_{I_1 \cup \{\, k \,\}, I_2}$ biztosítja egy olyan $b \in A$ létezését, amire P_i-k ($i \in I$) közül pontosan azok igazak, mint a-ra, és P_k pontosan akkor igaz b-re, ha nem igaz a-ra. Ebből viszont következik, hogy $\mathcal{A} \models \varphi(x)[b]$, mert az a-t a b-vel felcserélő (mindenki mindenki mást helybenhagyó) függvény automorfizmusa az $\mathcal{A} \restriction \{\, P_i : i \in I \,\}$ struktúrának.

Ez viszont mutatja, hogy φ nem generálhatja $tp_{\mathcal{A}}(a)$-t, mert $\varphi \in tp_{\mathcal{A}}(b)$, 3.7 szerint tehát akkor generálná $tp_{\mathcal{A}}(b)$-t is, de $tp_{\mathcal{A}}(a)$ és $tp_{\mathcal{A}}(b)$ nem egyeznek meg P_k-ban.

3.9. Állítás. *Az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) *$\mathcal{A}$ atomi*

(ii) *minden $\bar{a} \in A$-ra $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ lokálisan megvalósítja $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-t*

(iii) *minden* $\bar{a} \in A$*-ra van olyan* $\varphi(\bar{x})$ *formula, hogy* $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{x})[\bar{a}]$ *és minden* $\psi(\bar{x})$*-re*

$$\operatorname{Th}\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})) \text{ vagy } \operatorname{Th}\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x})).$$

Biz. (i)⇒(ii): $\bar{a} \in A$-ra (i) miatt van olyan $\varphi(\bar{x})$ formula amit $\bar{a}$ kielégít $\mathcal{A}$-ban (következésképp φ konzisztens $\operatorname{Th}\mathcal{A}$-val) és amire $\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi \to \gamma)$ (vagyis $\operatorname{Th}\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi \to \gamma)$) minden $\gamma \in tp_A(\bar{a})$-ra.

(ii)⇒(iii): $\bar{a} \in A$-ra legyen $\varphi(\bar{x})$ az a formula, ami mutatja, hogy $\operatorname{Th}(\mathcal{A})$ lokálisan megvalósítja $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-t. Ez jó lesz, mert egyrészt $\varphi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, különben $\neg\varphi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$ és így $\operatorname{Th}\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \neg\varphi(\bar{x}))$, ami ellentmond $\operatorname{Th}\mathcal{A} \cup \{\,\varphi\,\}$ konzisztenciájának; másrészt minden $\psi(\bar{x})$-re vagy ψ, vagy $\neg\psi$ $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-beli, ezért a feltevés szerint $\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$ vagy $\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x}))$.

(iii)⇒(i): A (iii) miatt létező φ mutatja, hogy $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$ principális, hiszen $\varphi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, és ha $\psi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, akkor $\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$, mert $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})[\bar{a}]$, tehát $\mathcal{A} \not\models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x}))$. □

3.10. Tétel. *Ha* T *teljes elmélet egy megszámlálható nyelven és minden* $n \in \omega$*-ra* $S_n(T)$ *legfeljebb megszámlálható, akkor* T*-nek van megszámlálható atomi modellje.*

Biz. $\bigcup_{n\in\omega} S_n(T)$ legfeljebb megszámlálható, így 2.16 miatt T-nek van olyan megszámlálható $\mathcal{A}$ modellje, ami elkerüli az összes olyan $S_n(T)$-beli típust, amit T lokálisan elkerül. Ez a modell 3.9(ii) miatt atomi, mert minden $\mathcal{A}$-beli $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$-re $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) \in S_n(\operatorname{Th}\mathcal{A}) = S_n(T)$ és $\mathcal{A}$ megvalósítja, tehát $\operatorname{Th}\mathcal{A} = T$ lokálisan megvalósítja. □

A tétel megfordítása nem igaz, amint azt a következő példa mutatja:

3.11. Példa. Legyen $\mathcal{N}$ a számelmélet sztenderd modellje, $T = \operatorname{Th}(\mathcal{N})$. $\mathcal{N}$ atomi, mert univerzumának minden eleme egy term értéke (0, $S0$, $SS0$, …); márpedig egy ilyen modell mindig atomi, hiszen ha $a_i = t_i^{\mathcal{N}}$, akkor $x_1 = t_1 \wedge \dots x_n = t_n$ generálja $tp_{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$-t. T tehát teljes elmélet, aminek van megszámlálható atomi modellje. De $S_1(T)$ nem megszámlálható, a következők miatt. Legyen P a prímek halmaza, és $Q \subseteq P$-re legyen

$$\Gamma_Q(x) = \{\,\exists y(x = py) : p \in Q\,\} \cup \{\,\neg\exists y(x = py) : p \notin Q\,\}$$

Γ_Q konzisztens T-vel, mert minden véges része kielégíthető (triviálisan, $\mathcal{N}$-ben). De $\Gamma_Q \cup \Gamma_R$ inkonzisztens ha $Q \neq R$ (ha $p \in Q \setminus R$ és a megvalósítja $\Gamma_Q \cup \Gamma_R$-et $\mathcal{A} \in \operatorname{Mod}(T)$-ben, akkor p osztja is meg nem is a-t), tehát ha minden $Q \subseteq P$-re q_Q egy, a Γ_Q-t tartalmazó típus, akkor $\{\,q_Q : Q \subseteq P\,\}$ az $S_1(T)$ egy kontinuum nagy részhalmaza.

3.12. Feladat*.** Legyen T teljes elmélet egy megszámlálható nyelven. T-nek pontosan akkor van megszámlálható atomi modellje, ha T atomi (minden T-vel konzisztens $\psi(\bar{x})$ formulához van olyan $\varphi(\bar{x})$ amire $T \models \varphi \to \psi$ és minden $\gamma(\bar{x})$-re $T \models \varphi \to \gamma$ és $T \models \varphi \to \neg\gamma$ közül pontosan az egyik áll).

3.13. Állítás. *Ha* $\mathcal{A}$ *atomi, akkor* $\langle\,\mathcal{A}, \bar{a}\,\rangle$ *is az, minden* A*-beli véges* $\bar{a}$ *sorozatra. (*$\mathcal{L}$ *nem feltétlenül megszámlálható.)*

Biz. Természetesen elég azt megmutatni, hogy $\langle\,\mathcal{A}, a\,\rangle$ atomi, minden $a \in A$-ra. Legyen $\bar{b}$ A-beli véges sorozat, $\varphi(y, \bar{x})$ pedig a $tp_{\mathcal{A}}(a\bar{b})$-t generáló formula. Akkor $\varphi(c_a/y, \bar{x})$ generálja $tp_{\langle\,\mathcal{A},a\,\rangle}(\bar{b})$-t, mert ha $\langle\,\mathcal{A}, a\,\rangle \models \psi(\bar{x})[\bar{b}]$, akkor $\mathcal{A} \models \psi(y/c_a, \bar{x})[a, \bar{b}]$, azaz $\psi(y/c_a, \bar{x}) \in tp_{\mathcal{A}}(a\bar{b})$, ezért $\mathcal{A} \models \varphi(y, \bar{x}) \to \psi(y/c_a, \bar{x})$, és így $\langle\,\mathcal{A}, a\,\rangle \models \varphi(c_a/y, \bar{x}) \to \psi(\bar{x})$. □

3.14. Feladat*. Elhagyható-e a fenti állításban az „$\bar{a}$ véges" feltétel?

3.15. Lemma. *Ha $\mathcal{B}$ atomi és $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$, ahol $\bar{a}$ és $\bar{b}$ véges A ill. B-beli sorozatok, akkor minden $e \in B$-re van $d \in A$ hogy $\langle \mathcal{A}, \bar{a}d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b}e \rangle$. ($\mathcal{L}$ nem feltétlenül megszámlálható.)*

Biz. 3.13 miatt elég az állításnak azt a speciális esetét bizonyítani, amikor $\bar{a}$ és $\bar{b}$ üresek. Legyen $\varphi(x)$ a $tp_{\mathcal{B}}(e)$-t generáló formula; akkor $\mathcal{B}$-ben, és így $\mathcal{A}$-ban is igaz $\exists x \varphi(x)$; legyen $d \in A$ ennek egy tanúja. Azt állítjuk, hogy $\langle \mathcal{A}, d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, e \rangle$.

3.7 miatt $\varphi(x)$ generálja $tp_{\mathcal{A}}(d)$-t. Ezért ha c egy új konstans, ami $\langle \mathcal{A}, d \rangle$-ben d-t, $\langle \mathcal{B}, e \rangle$-ben e-t jelenti, akkor

$$\langle \mathcal{A}, d \rangle \models \psi \iff \mathcal{A} \models \psi(x/c)[d] \iff \psi(x/c) \in tp_{\mathcal{A}}(d) \iff \mathcal{A} \models \varphi \to \psi(x/c)$$
$$\iff \mathcal{B} \models \varphi \to \psi(x/c) \iff \psi(x/c) \in tp_{\mathcal{B}}(e) \iff \mathcal{B} \models \psi(x/c)[e] \iff \langle \mathcal{B}, e \rangle \models \psi$$

minden $\psi \in Sent(\mathcal{L}(c))$-re. □

3.16. Definíció. λ-homogén egy $\mathcal{A}$ modell, ha minden olyan λ-nál rövidebb $\bar{a}$, $\bar{b}$ A-beli sorozatokra, melyekre $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{A}, \bar{b} \rangle$, minden $d \in A$-ra létezik $e \in A$ amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a}d \rangle \equiv \langle \mathcal{A}, \bar{b}e \rangle$. $\mathcal{A}$ erősen λ-homogén, ha ugyanezen feltételek mellett van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő automorfizmusa.

3.17. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ atomi, akkor ω-homogén. ($\mathcal{L}$ nem feltétlenül megszámlálható.)*

3.18. Lemma. (i) *Legyenek $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ és $|B| = \lambda$. Tegyük fel, hogy minden olyan A-beli $\bar{a}$ és B-beli $\bar{b}$ λ-nál rövidebb sorozatra, amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$, igaz, hogy*

minden $e \in B$-re létezik $d \in A$, hogy $\langle \mathcal{A}, \bar{a}d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b}e \rangle$.

Akkor $\mathcal{B}$ elemien beágyazható $\mathcal{A}$-ba. Sőt, minden olyan A-beli $\bar{a}$ és B-beli $\bar{b}$ λ-nál rövidebb sorozatra, amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$, létezik $\bar{b}$-t $\bar{a}$-ba vivő elemi beágyazás.

(ii) *(i) igaz marad ha benne „$\equiv$"-t „$\equiv_0$"-ra és „elemi beágyazás"-t „beágyazás"-ra cseréljük.*

Biz. (i) A konklúzió második mondata következik az elsőből a lemmát $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$-ra és $\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$-re alkalmazva. Tehát elég az elsőt bizonyítani.

Legyen $\bar{b} : \lambda \longrightarrow B$ B egy felsorolása. Definiálunk egy f_α függvénysorozatot ($\alpha \leq \lambda$ rendszám) úgy, hogy a következők teljesüljenek minden $\alpha \leq \lambda$-ra:

(1) $$f_\alpha : \alpha \longrightarrow A$$

(2) $$f_\alpha \supseteq f_\beta \quad \text{ha } \beta < \alpha$$

(3) $$\langle \mathcal{A}, f_\alpha \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \restriction \alpha \rangle$$

Legyen $f_0 = \emptyset$. Ez triviálisan kielégíti az első két feltételt, az utolsót pedig az $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ feltevés miatt. Ha α limesrendszám, akkor $f_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Erre (2) triviálisan teljesül, (1) azért mert (1) és (2) igaz minden $\beta < \alpha$-ra, (3) pedig azért mert igaz minden $\beta < \alpha$-ra.

Ha $\alpha = \beta + 1$ és f_β kielégíti (1)–(3)-at, akkor (3) és a feltevés miatt van olyan $d \in A$ amire $\langle \mathcal{A}, f_\beta, d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \restriction \beta, \bar{b}_\beta \rangle$. Legyen $f_\alpha = f_\beta \cup \{ \langle \beta, d \rangle \}$. Világos, hogy f_α mind a három feltételnek eleget tesz.

Végül legyen $f = f_\lambda$. Akkor $f : \lambda \longrightarrow A$ függvény és $\langle \mathcal{A}, f \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$ (1) és (3) miatt. A $h(\bar{b}_\alpha) = f(\alpha)$ által definiált $B \longrightarrow A$ függvényre tehát igaz, hogy $\langle \mathcal{A}, hb \rangle_{b \in B} \models \text{eldiag}(\mathcal{B})$, azaz 1.13 szerint h elemi beágyazás.

(ii) bizonyítását megkapjuk (i) bizonyításából, ha abban „elemi beágyazás"-t „beágyazás"-ra, „$\equiv$"-t „$\equiv_0$"-ra és eldiag-ot diag-ra cseréljük. □

3.19. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ megszámlálható atomi modell, akkor $\mathcal{A}$ elemien beágyazható minden, vele elemien ekvivalens modellbe. Speciel ha $\mathcal{A}$ megszámlálható atomi modellje a T teljes elméletnek, akkor $\mathcal{A}$ elemien beágyazható T minden modelljébe.*

Biz. 3.18(i) és 3.15. □

Ezt az érvelést oda-vissza használva látjuk be mindjárt (3.23), hogy elemien ekvivalens megszámlálható atomi modellek izomorfak.

3.20. Lemma. (i) *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ λ-számosságú elemien ekvivalens modellek. Tegyük fel, hogy minden olyan A-beli $\bar{a}$ és B-beli $\bar{b}$ λ-nál rövidebb sorozatra, amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$, igazak a következők:*

$$\text{minden } d \in A\text{-ra létezik } e \in B, \text{ hogy } \langle \mathcal{A}, \bar{a}d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b}e \rangle \text{ és}$$

$$\text{minden } e \in B\text{-re létezik } d \in A, \text{ hogy } \langle \mathcal{A}, \bar{a}d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b}e \rangle.$$

Akkor $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Sőt, minden olyan A-beli $\bar{a}$ és B-beli $\bar{b}$ λ-nál rövidebb sorozatra, amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$, létezik $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő izomorfizmus.

(ii) *(i) igaz marad ha benne „elemi ekvivalencia"-t és „$\equiv$"-t „$\equiv_0$"-ra cseréljük.*

Biz. A konklúzió második mondata következik az elsőből a lemmát $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$-ra és $\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$-re alkalmazva. Tehát elég $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$-t bizonyítani.

Legyen $\bar{a} : \lambda \longrightarrow A$ az A, $\bar{b} : \lambda \longrightarrow B$ a B egy felsorolása. Definiálunk két függvénysorozatot, f_α-t és g_α-t ($\alpha \leq \lambda$ rendszám) úgy, hogy a következők teljesüljenek minden $\alpha \leq \lambda$-ra:

$$f_\alpha : \alpha \longrightarrow A, \quad g_\alpha : \alpha \longrightarrow B \tag{1}$$

$$f_\alpha \supseteq f_\beta, \quad g_\alpha \supseteq g_\beta \quad \text{ha } \beta < \alpha \tag{2}$$

$$\langle \mathcal{A}, \bar{a} \restriction \alpha, f_\alpha \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, g_\alpha, \bar{b} \restriction \alpha \rangle \tag{3}$$

Legyen $f_0 = \emptyset = g_0$. Ez triviálisan kielégíti az első két feltételt, az utolsót pedig az $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ feltevés miatt. Ha α limesrendszám, akkor $f_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} f_\beta$ és $g_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} g_\beta$. Ezekre (2) triviálisan teljesül, (1) azért mert (1) és (2) igaz minden $\beta < \alpha$-ra, (3) pedig azért mert igaz minden $\beta < \alpha$-ra.

Ha $\alpha = \beta + 1$ és f_β, g_β kielégítik (1)–(3)-at, akkor (3) miatt van olyan $e \in B$ amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \restriction \beta, \bar{a}_\beta, f_\beta \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, g_\beta, e, \bar{b} \restriction \beta \rangle$, és így van olyan $d \in A$ amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \restriction \beta, \bar{a}_\beta, f_\beta, d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, g_\beta, e, \bar{b} \restriction \beta, \bar{b}_\beta \rangle$. Legyen $f_\alpha = f_\beta \cup \{ \langle \beta, d \rangle \}$, $g_\alpha = g_\beta \cup \{ \langle \beta, e \rangle \}$. Világos, hogy f_α, g_α mind a három feltételnek eleget tesznek.

Végül legyen $f = f_\lambda$ és $g = g_\lambda$. Akkor $f : \lambda \longrightarrow A$, $g : \lambda \longrightarrow B$ függvények és $\langle \mathcal{A}, \bar{a}, f \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, g, \bar{b} \rangle$ (1) és (3) miatt. 1.18 szerint tehát $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(ii) bizonyítását megkapjuk (i) bizonyításából, ha abban „$\equiv$"-t „$\equiv_0$"-ra cseréljük. □

3.21. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ $|A|$-homogén, akkor erősen $|A|$-homogén.*

3.22. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ megszámlálható atomi modell, akkor erősen ω-homogén.*

Biz. 3.17 és 3.21. □

3.23. Tétel. *Ha $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ legfeljebb megszámlálható atomi modellek, akkor $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Biz. 3.15 és 3.20(i). □

3.24. Példa. 3.20(ii) segítségével most már meg tudjuk mutatni, hogy $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ atomi, és még egy kicsit többet is.

Először is, ha $a_0, \dots, a_{n-1}$, $b_0, \dots, b_{n-1} \in A^n$ és $\langle \mathcal{A}, a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \equiv_0 \langle \mathcal{A}, b_0, \dots, b_{n-1} \rangle$, akkor minden $a \in A$-hoz van $b \in A$, hogy $\langle \mathcal{A}, a_0, \dots, a_{n-1}, a \rangle \equiv_0 \langle \mathcal{A}, b_0, \dots, b_{n-1}, b \rangle$. Ha $a = a_i$ valamelyik $i < n$-re, akkor $b = b_i$ jó lesz. Máskülönben legyen $I = \{ i < n : a_i < a \}$ és $J = \{ i < n : a < a_i \}$; a feltevés miatt minden $i \in I$ és $j \in J$-re $b_i < b_j$. Ha tehát I, J egyike sem üres, akkor $<$ sűrűsége, ellenkező esetben meg a végpont-nélkülisége miatt van olyan $b \in B$, hogy $b_i < b$ vagy $b < b_i$ attól függően, hogy $i \in I$ vagy $i \in J$.

3.20(ii) miatt tehát $\mathcal{A}$ $|\mathcal{A}|$-homogén, és így 3.21 szerint erősen $|\mathcal{A}|$-homogén. Azt állítjuk, hogy $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ típusát generálja az $\varphi_{\bar{a}}(\bar{x}) = \bigwedge\{ x_i < x_j : a_i < a_j, 1 \le i, j \le n \} \wedge \bigwedge\{ x_i = x_j : a_i = a_j, 1 \le i, j \le n \}$ formula. Legyen ui. $\psi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$; ha $\mathcal{A} \not\models \varphi_{\bar{a}} \to \psi$, akkor van olyan $\bar{b} = b_1, \dots, b_n$, amire $\mathcal{A} \models \varphi_{\bar{a}} \wedge \neg\psi[\bar{b}]$. De $\varphi_{\bar{a}}$ definíciója miatt $\varphi_{\bar{a}} \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) \cap tp_{\mathcal{A}}(\bar{b})$-ből $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv_0 \langle \mathcal{A}, \bar{b} \rangle$ következik (ld. 1.18), a fentiek miatt azért $\mathcal{A}$-nak van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő automorfizmusa. Akkor viszont $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$-ből $\mathcal{A} \models \psi[\bar{b}]$ következik.

Vagyis $\mathcal{A}$ atomi, ráadásul minden n-re csak véges sok n-típust valósít meg, hiszen csak véges sok $\mathcal{A}$ szerint páronként nem ekvivalens $\varphi_{\bar{a}}$ van.

3.25. Feladat*. Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan megszámlálható gráf, ami rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha X és Y A diszjunkt, véges részhalmazai, akkor van olyan $a \in A$, ami minden X-beli pontnak szomszédja, de egyetlen Y-beli pontnak sem szomszédja. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$ atomi, és minden n-re csak véges sok n-típust valósít meg.

A feladatbeli feltételnek eleget tesz az a gráf, aminek a pontjai a természetes számok, és n, m-et akkor köti össze él, ha n bináris felírásában az m. számjegy 1 vagy fordítva. Ezt a gráfot megszámlálható véletlen gráfnak hívjuk, és 4.2-ből következik majd, hogy ez az egyetlen, a feladatbeli tulajdonsággal rendelkező megszámlálható gráf.

3.26. Feladat*. Bizonyítsuk be, hogy minden véges exponensű megszámlálható Abel-csoport atomi, és minden n-re csak véges sok n-típust valósít meg.

3.27. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ megszámlálható atomi modell és $\bar{a}$, $\bar{b}$ véges A-beli sorozatok, akkor az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{A}, \bar{b} \rangle$
(ii) *$\mathcal{A}$-nak van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő automorfizmusa*
(iii) $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = tp_{\mathcal{A}}(\bar{b})$

Biz. (i)-ből következik (ii) 3.13 és 3.23 miatt, (ii)-ből triviálisan következik (iii), (iii)-ból pedig 2.3 miatt következik (i). □

Lindenbaum-Tarski algebrák

3.28. Definíció. Legyen T egy elmélet az $\mathcal{L}$ nyelven, $n \in \omega$ és $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$. $\mathcal{B}_n(T)$, T n. Lindenbaum-Tarski algebrája egy Boole-algebra, amelynek univerzuma az $\mathcal{L}$-beli $\varphi(\bar{x})$ formulák T szerinti ekvivalencia-osztályaiból áll, azaz

$$B_n(T) = \{ |\varphi(\bar{x})| : \varphi(\bar{x}) \in Form_{\mathcal{L}} \}, \text{ ahol } |\varphi(\bar{x})| = \{ \psi(\bar{x}) \in Form_{\mathcal{L}} : T \models \varphi \leftrightarrow \psi \},$$

a műveletek pedig

$$-|\varphi| = |\neg\varphi|, \qquad |\varphi| \cdot |\psi| = |\varphi \wedge \psi|, \qquad |\varphi| + |\psi| = |\varphi \vee \psi|.$$

3.29. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

(i) ezek a műveletek jól definiáltak
(ii) $\mathcal{B}_n(T)$ valóban Boole-algebra
(iii) $\mathcal{B}_n(T)$ triviális (egyetlen eleme van) pontosan akkor, ha T inkonzisztens
(iv) ha $\mathcal{A}$ a T egy modellje, akkor $\mathcal{B}_n(T)$ izomorf A^n részhalmazainak egy halmazalgebrájával
(v) $|\varphi(\bar{x})| = 1$ $\mathcal{B}_n(T)$-ben pontosan akkor ha $T \models \varphi(\bar{x})$
(vi) $|\varphi(\bar{x})| \leq |\psi(\bar{x})|$ $\mathcal{B}_n(T)$-ben pontosan akkor ha $T \models \varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})$
(vii) T teljes pontosan akkor ha $\mathcal{B}_0(T)$ a kételemű Boole-algebra
(viii) T atomi (v.ö. 3.12) pontosan akkor ha minden n-re $\mathcal{B}_n(T)$ atomos
(ix) $\Gamma(\bar{x}) \in S_n(T)$ pontosan akkor ha $\{\, |\varphi| : \varphi \in \Gamma \,\}$ ultrafilter $\mathcal{B}_n(T)$-ben

4. Megszámlálható, nem izomorf modellek száma

Ebben a szakaszban végig egy megszámlálható $\mathcal{L}$ nyelven felírt teljes elméletek megszámlálható modelljeiről lesz szó. Elsődleges célunk annak megmutatása, hogy egy ilyen T elméletnek egyetlen megszámlálható modellje van ha minden n-re $S_n(T)$ véges, és 2^ω megszámlálható modellje van ha $S_n(T)$ nem megszámlálható valamilyen n-re.

4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{G}$ az A halmaz permutációinak egy csoportja. $\mathcal{G}$ elemei természetes módon permutálják A^n-t is (ha $g \in \mathcal{G}$ és $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \bar{a} \in A^n$, akkor $g\bar{a} = \langle ga_1, \ldots, ga_n \rangle$). $\mathcal{G}$ *oligomorf*, ha minden $n \in \omega$-ra $\mathcal{G}$ pályáinak száma A^n-en véges. Emlékeztetőül: $\mathcal{G}$ egy pályája A^n-en $\{\, g\bar{a} : g \in \mathcal{G} \,\}$, ahol $\bar{a} \in A^n$.

Jelölje $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ modell automorfizmusainak halmazát. Emlékeztetőül: ω-kategorikus egy elmélet, ha egyetlen megszámlálható modellje van; és ω-kategorikus egy (nem feltétlenül megszámlálható) modell, ha az elmélete az.

4.2. Tétel. *Ha T teljes elmélet egy megszámlálható nyelven aminek van végtelen modellje, akkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *T minden megszámlálható modelljének automorfizmus-csoportja oligomorf*
(ii) *T-nek van olyan megszámlálható modellje, aminek automorfizmus-csoportja oligomorf*
(iii) *T-nek van olyan megszámlálható modellje, ami minden n-re csak véges sok n-típust valósít meg*
(iv) *$S_n(T)$ véges minden $n \in \omega$-ra*
(v) *minden $n \in \omega$-ra csak véges sok T szerint páronként nem ekvivalens $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula van*
(vi) *minden $n \in \omega$-ra T lokálisan megvalósítja $S_n(T)$ minden elemét*
(vii) *T minden modellje atomi*
(viii) *T ω-kategorikus (azaz T-nek izomorfizmus erejéig egyetlen megszámlálható modellje van).*

Biz. (i)⇒(ii) A Löwenheim-Skolem tétel miatt.

(ii)⇒(iii) Legyen $\mathcal{A}$ T-nek az a (ii) szerint létező modellje, amire $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ oligomorf. Akkor $\mathcal{A}$ csak véges sok n-típust valósít meg, mert ha $g\bar{a} = \bar{b}$ valamilyen $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$-ra, akkor $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = tp_{\mathcal{A}}(\bar{b})$.

(iii)⇒(iv) Legyen $\mathcal{A}$ T-nek az a modellje, ami minden n-re csak véges sok n-típust valósít meg, és rögzített $n \in \omega$-ra legyenek $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{m-1}$ az $\mathcal{A}$ n-típusai. Először is, minden $i < m$-re van olyan $\varphi_i(\bar{x})$ formula, amire

(1) $$\varphi_i \in \Gamma_j \iff i = j$$

mert ha $\psi_j \in \Gamma_i \setminus \Gamma_j$ minden $j \neq i$-re, akkor $\varphi_i = \bigwedge_{j \neq i} \psi_j$ ilyen, hiszen Γ_i-beli mert ilyenek konjunkciója, és $j \neq i$-re $\varphi_i \to \psi_j$, tehát $\varphi_i \notin \Gamma_j$, különben $\psi_j \in \Gamma_j$ lenne.

(2) $$T \models \forall \bar{x} \bigvee_{i<m} \varphi_i$$

mert minden $\bar{a} \in A^n$-re van (pontosan) egy $i < m$, hogy $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = \Gamma_i$; de $\varphi_i \in \Gamma_i$, tehát $\mathcal{A} \models \varphi_i(\bar{x})[\bar{a}]$. Ezért $\mathcal{A} \models \forall \bar{x} \bigvee_{i<m} \varphi_i$, amiből T teljessége miatt következik (2).

Végül

(3) $$\text{ha } \varphi_i \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}), \text{ akkor } tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = \Gamma_i$$

mert (1) miatt Γ_i az egyetlen $\mathcal{A}$-ban megvalósuló típus, ami tartalmazza φ_i-t.

Legyen most $\Gamma \in S_n(T)$. Van olyan $i < m$, hogy $\varphi_i \in \Gamma$; máskülönben $\bigwedge_{i<m} \neg\varphi_i \in \Gamma$, speciálisan $\exists \bar{x} \bigwedge_{i<m} \neg\varphi$, azaz $\exists \bar{x} \neg \bigvee_{i<m} \varphi$ konzisztens T-vel, ami ellentmond (2)-nek. Azt állítjuk, hogy $\Gamma = \Gamma_i$; és ez igaz, ha $\Gamma \subseteq \Gamma_i$. Úgyhogy legyen most $\gamma \in \Gamma$ tetszőleges. $\varphi_i \in \Gamma$ miatt $\varphi_i \wedge \gamma$ konzisztens T-vel, T teljessége miatt tehát $T \models \exists \bar{x}(\varphi_i \wedge \gamma)$, és így $\mathcal{A} \models \exists \bar{x}(\varphi_i \wedge \gamma)$. Legyen $\bar{a}$ ennek egy tanúja. Akkor φ_i és γ is $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-beli. Előbbi miatt (3) szerint $\Gamma_i = tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, tehát $\gamma \in \Gamma_i$.

(iv)⇒(v) Ha $T \not\models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$, azaz mondjuk $T \not\models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \to \psi(x_1, \ldots, x_n)$, akkor $\exists x_1, \ldots, x_n(\varphi \wedge \neg\psi)$ konzisztens T-vel, tehát van $\Gamma \in S_n(T)$ amire $\varphi \in \Gamma$ és $\neg\psi \in \Gamma$. Másszóval minden ilyen formula-párt megkülönböztet egy $\Gamma \in S_n(T)$. Következésképp $Form_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$-nek legfeljebb $2^{|S_n(T)|}$ különböző ekvivalencia-osztálya lehet modulo T.

(v)⇒(vi) $n \in \omega$-ra tartalmazzon Σ a $Form_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$ T szerinti ekvivalencia-osztályaiból egy-egy elemet ((v) szerint tehát Σ véges). Akkor $\Gamma \in S_n(T)$-re $\psi_\Gamma = \bigwedge\{\, \varphi : \varphi \in \Sigma \cap \Gamma \,\}$ lokálisan megvalósítja Γ-t, mert persze konzisztens T-vel (hiszen 2.13 miatt Γ-beli), és ha $\gamma \in \Gamma$ és φ egy T szerint γ-val ekvivalens Σ-beli formula, akkor $\varphi \in \Sigma \cap \Gamma$ és így $T \models \psi_\Gamma \to \gamma$.

(vi)⇒(vii) Ha $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(T)$, akkor T teljessége miatt $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$; ezért a feltevés miatt minden $\bar{a} \in A^n$-re $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ lokálisan megvalósítja $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) \in S_n(T)$-t, vagyis 3.9 szerint $\mathcal{A}$ atomi.

(vii)⇒(viii) T teljessége miatt következik 3.23-ból.

(viii)⇒(i) Legyen $\mathcal{A}$ a T egyetlen megszámlálható modellje. 2.8 miatt T minden típusa megvalósul $\mathcal{A}$-ban, azaz minden n-re

(4) $$S_n(T) = \{\, tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) : \bar{a} \in A^n \,\}.$$

Ezért egyrészt minden n-re $S_n(T)$ legfeljebb megszámlálható, és így 3.10 miatt $\mathcal{A}$ atomi, másrészt 3.27 miatt elég azt belátni, hogy $S_n(T)$ véges minden n-re. Mivel $\mathcal{A}$ atomi, (4) miatt minden $\Gamma \in S_n(T)$-hez van Γ-t generáló $\varphi_\Gamma \in \Gamma$ formula. A $\Sigma = \{\, \neg\varphi_\Gamma : \Gamma \in S_n(T) \,\}$ formulahalmazt nem tartalmazza egyetlen $\Gamma \in S_n(T)$ sem (mert $\neg\varphi_\Gamma \in \Sigma$), tehát Σ inkonzisztens T-vel, 2.7 miatt tehát már egy $\Sigma' = \{\neg\varphi_{\Gamma_1}, \ldots, \neg\varphi_{\Gamma_m}\} \subseteq_\omega \Sigma$ is az, azaz

$T \models \neg\exists\bar{x}(\neg\varphi_{\Gamma_1} \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_{\Gamma_m})$, vagyis $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = T \models \forall\bar{x}(\varphi_{\Gamma_1} \vee \ldots \vee \varphi_{\Gamma_m})$, másszóval

$$\mathcal{A} \models \forall\bar{x}(\varphi_{\Gamma_1} \vee \ldots \vee \varphi_{\Gamma_m}). \tag{5}$$

De akkor $S_n(T) \subseteq \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$, mert (5) miatt minden $\bar{a} \in A^n$-re létezik $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ amire $\varphi_{\Gamma_i} \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, 3.7 szerint tehát φ_{Γ_i} generálja $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-t, következésképp $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = \Gamma_i$. $\square$

4.3. Következmény. *$\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ (vagyis a racionális számok a szokásos rendezéssel), a megszámlálható véletlen gráf, és minden megszámlálható véges exponensű Abel-csoport ω-kategorikus.*

Biz. 3.24, 3.25, 3.26 és 4.2. $\square$

4.4. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ egy megszámlálható nyelv ω-kategorikus modellje, akkor lokálisan véges. Sőt, minden n-re van olyan m_n, hogy $\mathcal{A}$ minden n elem által generált részmodellje legfeljebb m_n elemű.*

Biz. Legyen $H = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ és $b_1, b_2 \in Sg^{\mathcal{A}}(H)$, $b_1 \neq b_2$. Akkor van olyan $t_1(x_1, \ldots, x_n)$, $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ term, amikre $b_i = t_i^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$, tehát ezekre $t_i(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1} \in tp_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n, b_i)$, következésképp $tp_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n, b_1)$, $tp_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n, b_2) \in S_{n+1}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}))$ különböznek. Vagyis $|Sg^{\mathcal{A}}(H)| \leq |S_{n+1}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}))| + n$, és 4.2(iv) miatt $S_{n+1}(\mathrm{Th}(\mathcal{A}))$ véges. $\square$

4.5. Következmény. *Megszámlálható Abel-csoport pontosan akkor ω-kategorikus, ha véges exponensű.*

Biz. Az imént láttuk, hogy az ilyen Abel-csoportok ω-kategorikusak, az előző következmény pedig mutatja, hogy csak az ilyenek lehetnek azok. $\square$

4.6. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ megszámlálható ω-kategorikus modell, akkor* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *definicionális ekvivalencia erejéig meghatározza.*

Biz. Nevezzük $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$-t ekvivalensnek ha van olyan $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, hogy $g\bar{a} = \bar{b}$. 4.2(i) miatt így minden n-re A^n egy véges partícióját kapjuk; legyenek $\{S_{n1}, \ldots, S_{nk_n}\}$ az ekvivalenciaosztályok, és legyen $\mathcal{B} = \langle A, \{S_{\bar{a}_{ni}} : n \in \omega, 1 \leq i \leq k_n\} \rangle$. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ definicionálisan ekvivalensek, azaz $\mathcal{A}$ minden relációja definiálható $\mathcal{B}$-ben és fordítva.

Ha ugyanis $R^{\mathcal{A}}$ az $\mathcal{A}$ egy n-argumentumú relációja, akkor $R^{\mathcal{A}} = \cup\{S_{ni} : 1 \leq i \leq k_n, S_{ni} \subseteq R^{\mathcal{A}}\}$, vagyis $R^{\mathcal{A}}$-t definiálja $\mathcal{B}$-ben a $\bigvee\{S_{ni}(x_1, \ldots, x_n) : 1 \leq i \leq k_n, S_{ni} \subseteq R^{\mathcal{A}}\}$ formula: ha ugyanis $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}}$, akkor $\bar{a} \in S_{ni}$ valamilyen $1 \leq i \leq k_n$-re, és akkor $S_{ni} \subseteq R^{\mathcal{A}}$, mert $R^{\mathcal{A}}$ invariáns $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ elemeire. Fordítva, mivel 4.2(vii) szerint $\mathcal{A}$ atomi, $\bar{a} \in S_{ni}$-re létezik $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$-t generáló $\varphi(\bar{x})$ formula, és ez definiálja is S_{ni}-t (vagyis $\varphi^{\mathcal{A}} = S_{ni}$), mert ha $\bar{b} \in \varphi^{\mathcal{A}}$, azaz $\varphi \in tp_{\mathcal{A}}(\bar{b})$, akkor 3.7 miatt $tp_{\mathcal{A}}(\bar{b}) = tp_{\mathcal{A}}(\bar{a})$, 3.27 szerint tehát van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, azaz $\bar{b} \in S_{ni}$; ha pedig $\bar{b} \in S_{ni}$, azaz van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, akkor persze $\bar{b} \in \varphi^{\mathcal{A}}$. $\square$

Most nézzük a másik végletet.

4.7. Tétel. *Ha $|S_n(T)| > \omega$, akkor T-nek 2^ω nemizomorf megszámlálható modellje van.*

A bizonyítás két lemmán alapszik, és mindkettőben lényeges szerepet játszik a következő fogalom: $\varphi(\bar{x}) \in Form(\bar{x})$ vastag, ha $|U_\varphi| > \omega$, ahol $U_\varphi = \{p \in S_n(T) : \varphi \in p\}$.

4.8. Lemma. *Ha $\varphi(\bar{x})$ vastag, akkor van olyan vastag $\psi_0(\bar{x})$ és $\psi_1(\bar{x})$ amikre $T \models \varphi \leftrightarrow \psi_0 \vee \psi_1$ és $T \models \neg\exists\bar{x}(\psi_0 \wedge \psi_1)$.*

Biz. Először is,

(1) $$U_{\varphi_1 \vee \varphi_2} = U_{\varphi_1} \cup U_{\varphi_2} \qquad \text{minden } \varphi_1, \varphi_2 \in Form(\bar{x})\text{-re}$$

(Hasonló állítás igaz $\neg$-ra és így $\wedge$-ra is, de ezekre nem lesz szükségünk.) ($\supseteq$) Triviális 2.13 miatt. ($\subseteq$) meg azért igaz, mert ha $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in p$ de $\varphi_1 \notin p$, akkor 2.13 miatt $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \neg\varphi_1 \equiv \varphi_2 \wedge \neg\varphi_1 \in p$, ezért (megintcsak 2.13 miatt) $\varphi_2 \in p$.

Most tegyük fel, hogy φ vastag, de nem áll elő két diszjunkt vastag formula $\vee$-jaként. Azt állítjuk, hogy

(2) $$q = \{\, \psi \in Form(\bar{x}) : \varphi \wedge \psi \text{ vastag} \,\} \in S_n(T)$$

$q \neq \emptyset$, mert $\varphi \in q$, és zárt $\wedge$-re, mert ha $\psi_1, \psi_2 \in q$, akkor (1) miatt $U_{\varphi \wedge \psi_1} = U_{\varphi \wedge \psi_1 \wedge \psi_2} \cup U_{\varphi \wedge \psi_1 \wedge \neg\psi_2}$, tehát az utóbbi két halmaz valamelyike nem megszámlálható; de $U_{\varphi \wedge \psi_1 \wedge \neg\psi_2}$ nem lehet az, mert akkor (2.13 miatt) $U_{\varphi \wedge \neg\psi_2} \supseteq U_{\varphi \wedge \psi_1 \wedge \neg\psi_2}$ sem megszámlálható, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, hiszen $\varphi \equiv (\varphi \wedge \psi_2) \vee (\varphi \wedge \neg\psi_2)$ és az utóbbi két formula diszjunkt és vastag.

2.7 és q $\wedge$-re való zártságából következik q konzisztenciája, hiszen minden q-beli ψ-re U_ψ nemhogy nem üres, de még csak nem is megszámlálható. (2) bizonyításából tehát már csak a maximalitás belátása van hátra. Ez viszont ugyanúgy (1)-ből következik, mint az $\wedge$-re való zártság. Nevezetesen: ha $\psi \notin q$, akkor $U_\varphi = U_{\varphi \wedge \psi} \cup U_{\varphi \wedge \neg\psi}$, tehát ha $U_{\varphi \wedge \psi}$ megszámlálható, akkor $U_{\varphi \wedge \neg\psi}$ nem az, vagyis $\neg\psi \in q$.

Ha belátjuk, hogy

(3) $$U_\varphi \subseteq \{\, q \,\} \cup \bigcup \{\, U_{\varphi \wedge \neg\psi} : \psi \in q \,\}$$

akkor a jobboldali halmazok közül valamelyik nem megszámlálható, azaz van olyan $\psi \in q$, amire $\varphi \wedge \neg\psi$ vastag. Ez viszont ellentmond indirekt feltevésünknek, hiszen a tőle diszjunkt $\varphi \wedge \psi$ q definíciója miatt vastag, és $\varphi \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)$.

(3) viszont igaz, mert ha $q \neq p \in U_\varphi$, akkor q maximalitása miatt $\varphi \in p \not\supseteq q$, azaz $\varphi \in p$ és létezik $\psi \in q \setminus p$. p maximalitása miatt $\neg\psi$ és így $\varphi \wedge \neg\psi$ is p-beli, azaz $p \in U_{\varphi \wedge \neg\psi}$. $\square$

4.9. Feladat. $U_{\neg\varphi} = S_n(T) \setminus U_\varphi$ és $U_{\varphi_1 \wedge \varphi_2} = U_{\varphi_1} \cap U_{\varphi_2}$.

4.10. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a lemmabeli (3)-ban egyenlőség is fennáll.

4.11. Lemma. *Ha $|S_n(T)| > \omega$, akkor $|S_n(T)| = 2^\omega$.*

Biz. $\leq$ világos, hiszen $\mathcal{L}$ megszámlálhatósága miatt $Form_{\mathcal{L}}(\bar{x})$-nek csak kontinuum sok részhalmaza van.

$\geq$ bizonyításához először rögzítünk minden vastag φ formulához egy, az előző lemma miatt létező φ', φ'' vastag formula-párt, amikre $T \models \varphi \leftrightarrow \varphi' \vee \varphi''$ és $T \models \neg\exists\bar{x}(\varphi' \wedge \varphi'')$. Minden $\mu \in {}^{\omega}2$-ra és $n \in \omega$-ra definiálunk indukcióval egy $\varphi_{\mu,n}$ formulát úgy, hogy a következők teljesüljenek:

(i) $\varphi_{\mu,n}$ vastag
(ii) ha $\mu \restriction n = \nu \restriction n$, akkor $\varphi_{\mu,n} = \varphi_{\nu,n}$
(iii) ha $\mu \restriction n = \nu \restriction n$ és $\mu(n) \neq \nu(n)$, akkor $T \models \neg\exists\bar{x}(\varphi_{\mu,n+1} \wedge \varphi_{\nu,n+1})$
(iv) $T \models \varphi_{\mu,n+1} \to \varphi_{\mu,n}$.

$\varphi_{\mu,0}$ legyen az $x = x$ formula, ahol $x \in \bar{x}$, $\varphi_{\mu,n+1}$ pedig legyen $\varphi'_{\mu,n}$ vagy $\varphi''_{\mu,n}$ annak megfelelően, hogy $\mu(n)$ 0 vagy 1.

Így mind a négy feltétel kielégül: az első definíció szerint ($n = 0$-ra azért, mert $U_{x=x} = S_n(T)$ nem megszámlálható), (ii)–(iv) szintén.

(i) miatt $q_\mu = \{ \varphi_{\mu,n} : n \in \omega \}$ minden formulája eleme T egy típusának, ezért konzisztens T-vel; továbbá q_μ T-beli ekvivalencia erejéig zárt $\wedge$-re, mert ha $r < m$, akkor $T \models \varphi_{\mu,r} \wedge \varphi_{\mu,m} \leftrightarrow \varphi_{\mu,m}$ (iv) miatt. Ezért q_μ 2.7 szerint konzisztens T-vel. Legyen p_μ egy q_μ-t tartalmazó típus.

Azt kell már csak belátnunk, hogy ha $\mu \neq \nu$, akkor $p_\mu \neq p_\nu$. Ez viszont triviális, mert legyen n a legkisebb szám amire $\mu(n) \neq \nu(n)$. Akkor $\varphi_{\mu,n+1} \in q_\mu \subseteq p_\mu$, $\varphi_{\nu,n+1} \in q_\nu \subseteq p_\nu$ és (iii) miatt $T \models \neg\exists\bar{x}(\varphi_{\mu,n+1} \wedge \varphi_{\nu,n+1})$, tehát $p_\mu \cup p_\nu$ nem konzisztens T-vel. □

4.7 bizonyítása. T-nek nem lehet 2^ω-nál több nemizomorf megszámlálható modellje, mert $\mathcal{L}$ megszámlálható modelljei izomorfizmus-típusainak száma legfeljebb kontinuum.

Az előző lemma miatt $|S_n(T)| = 2^\omega$. T minden típusa megvalósul T egy megszámlálható modelljében (2.8), és T minden megszámlálható modellje legfeljebb megszámlálható típust valósíthat meg (mert ha $|A| \leq \omega$, akkor $|A^n| \leq \omega$). Ha tehát κ T nemizomorf megszámlálható modelljeinek számossága, akkor $\kappa \geq 2^\omega$, mert $\kappa \cdot \omega = \max(\kappa, \omega) < 2^\omega$ minden $\kappa < 2^\omega$-ra. □

$S_n(T)$ mint metrikus tér $\mathcal{L}$ továbbra is megszámlálható nyelv, és most rögzítsük is $Form_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$ egy $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ felsorolását. A továbbiakban p, q, r mindig $S_n(T)$ elemeit jelölik.

4.12. Definíció (távolság $S_n(T)$-ben)**.** $p, q \in S_n(T)$-re p, q távolsága

$$\delta(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{ha } p = q \\ \frac{1}{2^{m_{pq}}} & \text{máskor,} \end{cases}$$

ahol $m_{pq} = \min\{ m : \varphi_m \in (p \setminus q) \cup (q \setminus p) \}$.

4.13. Lemma. *δ távolság $S_n(T)$-n.*

Biz. Csak a háromszögegyenlőtlenséggel kapcsolatban merülhetnek fel kételyek. Ez viszont igaz, mert $m_{pq} \geq \min(m_{pr}, m_{rq})$ (minden $i < \min(m_{pr}, m_{rq})$-ra $\varphi_i \in p \iff \varphi_i \in r \iff \varphi_i \in q$) és így

$$\delta(p,q) = \frac{1}{2^{m_{pq}}} \leq \frac{1}{2^{\min(m_{pr}, m_{rq})}} \leq \frac{1}{2^{m_{pr}}} + \frac{1}{2^{m_{rq}}} = \delta(p,r) + \delta(r,q)$$

ha p, q, r páronként különbözők. □

Most is, mint az előző szakaszban, $U_\varphi = \{ p \in S_n(T) : \varphi \in p \}$. Ha $\varphi = \varphi_k$, akkor U_φ helyett U_k-t írunk.

4.14. Lemma. *$\{ U_k : k \in \omega \}$ bázis az $\langle S_n(T), \delta \rangle$ térben (azaz: U_k-k nyíltak és minden nyílt halmaz ilyenek úniója).*

Biz. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy $p \in S_n(T)$ ϵ sugarú környezete

$$(1) \quad N_\epsilon(p) = \{\, q : \delta(p,q) < \epsilon \,\} = \{\, p \,\} \cup \{\, q : \frac{1}{2^{m_{pq}}} < \epsilon \,\}$$
$$= \{\, p \,\} \cup \{\, q : \log\frac{1}{\epsilon} < m_{pq} \,\} = \{\, q : (\forall i \le \log\frac{1}{\epsilon})(\varphi_i \in p \iff \varphi_i \in q) \,\}$$

Ha tehát $p \in U_k$, akkor $N_\epsilon(p) \subseteq U_k$ minden olyan ϵ-ra amire $k < \log\frac{1}{\epsilon}$; amivel nem csak azt láttuk be, hogy minden pontja belső pontja is U_k-nak, hanem azt is, hogy van olyan ϵ, ami ezt minden $p \in U_k$-ra mutatja.

Azt állítjuk, hogy ha U nyílt halmaz, akkor $U = \cup\{\, U_k : k \in \omega, U_k \subseteq U \,\}$. A $(\supseteq)$ tartalmazás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $p \in U$; p belső pontja U-nak, vagyis van olyan ϵ amire $N_\epsilon(p) \subseteq U$. Kész leszünk tehát, ha találunk egy olyan m-et, amire $p \in U_m \subseteq N_\epsilon(p)$. Legyen

$$\psi = \bigwedge\{\, \varphi_k : k < \log\frac{1}{\epsilon} \text{ és } \varphi_k \in p \,\} \wedge \bigwedge\{\, \neg\varphi_k : k < \log\frac{1}{\epsilon} \text{ és } \varphi_k \notin p \,\}$$

és m a ψ sorszáma. Világos, hogy $p \in U_m$, mert φ_m p-beli formulák konjunkciója, és így maga is p-beli. $U_m \subseteq N_\epsilon(p)$ bizonyításához (1) miatt azt kéne belátni, hogy ha $q \in U_m$, akkor q és p megegyeznek a $k < \log\frac{1}{\epsilon}$ indexű formulákon. De ez igaz, mert $\varphi_m = \psi$ definíciója miatt ha $\varphi_k \in p$, akkor $T \models \varphi_m \to \varphi_k$ és így 2.13 miatt $\varphi_k \in q$, ha pedig $\varphi_k \notin p$, akkor $T \models \varphi_m \to \neg\varphi_k$, 2.13 miatt tehát $\neg\varphi_k \in q$, ezért $\varphi_k \notin q$. □

4.15. Tétel. *$S_n(T)$ kompakt.*

Biz. Az előző lemma miatt elég azt belátni, hogy ha $S_n(T) \subseteq \cup\{\, U_i : i \in I \,\}$, akkor van olyan $J \subseteq_\omega I$, amire $S_n(T) \subseteq \cup\{\, U_i : i \in J \,\}$. Tegyük fel, hogy nincs, azaz minden $J \subseteq_\omega I$-re van olyan $q \in S_n(T)$, amire $q \notin \cup\{\, U_i : i \in J \,\}$, azaz $\{\, \varphi_i : i \in J \,\} \cap q = \emptyset$, azaz $\{\, \neg\varphi_i : i \in J \,\} \subseteq q$. Akkor speciel minden $J \subseteq_\omega I$-re $\{\, \neg\varphi_i : i \in J \,\}$ konzisztens T-vel, 2.7 (azaz végső soron a kompaktsági tétel) miatt ezért aztán $\{\, \neg\varphi_i : i \in I \,\}$ is konzisztens T-vel, tehát van olyan $r \in S_n(T)$, amire $\{\, \neg\varphi_i : i \in I \,\} \subseteq r$; de akkor $r \notin \cup\{\, U_i : i \in I \,\}$ (mert $\neg\varphi_i \in r$ miatt $\varphi_i \notin r$ minden $i \in I$-re), ami ellentmond $S_n(T) \subseteq \cup\{\, U_i : i \in I \,\}$-nek. □

4.16. Feladat*. $p \in S_n(T)$ izolált pont (nem lehet hozzá nem-triviális módon tartani) pontosan akkor, ha p principális.

5. Szaturált modellek

5.1. Definíció. $\mathcal{A}$ λ-szaturált (λ egy számosság), ha minden λ-nál rövidebb $\bar{a}$ A-sorozatra $\langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle$ megvalósít minden, az elméletével konzisztens $\Gamma(x)$ formulahalmazt. $\mathcal{A}$ szaturált, ha $|A|$-szaturált.

5.2. Példa. (V.ö. 1.10) Legyen T a $\{\, c_i \neq c_j : i,j \in \omega, i \neq j \,\}$ elmélet az $\mathcal{L} = \{\, c_i : i \in \omega \,\}$ nyelven. T-nek nincs véges modellje, és a megszámlálható modelljei így néznek ki: $\langle\, A, a_i \,\rangle_{i\in\omega}$, ahol $|A| = \omega$ és a_i-k páronként különböznek. Ilyenből pontosan ω darab van, mert két ilyen modell pontosan akkor izomorf, ha „névtelen” elemeik ($A \setminus \{\, a_i : i \in \omega \,\}$) száma megegyezik, de ez vagy $\in \omega$, vagy $= \omega$. A legkisebb modell (tehát amiben nincsenek névtelen elemek) atomi, mert minden elemet megnevez egy konstans (v.ö. 3.4). Azt állítjuk, hogy a legnagyobb (amiben végtelen sok névtelen elem van) viszont szaturált.

Legyen ui. $\mathcal{A}$ ez a modell, $\bar{a}' = a'_1, \ldots, a'_m \subseteq A$ és $\Gamma(x)$ a $\mathrm{Th}(\langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle)$-vel konzisztens formulahalmaz. 2.12 miatt van megszámlálható $\langle \mathcal{B}, b'_1, \ldots, b'_m \rangle \models \mathrm{Th}(\langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle)$ ami megvalósítja $\Gamma(x)$-et. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\langle \mathcal{B}, b'_1, \ldots, b'_m \rangle$ elemien beágyazható $\langle \mathcal{A}, a'_1, \ldots, a'_m \rangle$-be. Ez elég, hiszen ha h az elemi beágyazás és $b \in B$ megvalósítja $\Gamma(x)$-et $\langle \mathcal{B}, b'_1, \ldots, b'_m \rangle$-ben, akkor $h(b)$ megvalósítja $\Gamma(x)$-et $\langle \mathcal{A}, a'_1, \ldots, a'_m \rangle$-ben.

Az világos, hogy $\langle \mathcal{B}, b'_1, \ldots, b'_m \rangle$ beágyazható $\langle \mathcal{A}, a'_1, \ldots, a'_m \rangle$-be: $\langle \mathcal{B}, b'_1, \ldots, b'_m \rangle \models \mathrm{Th}(\langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle)$ miatt ugyanis $\langle \mathcal{B}, b'_1, \ldots, b'_m \rangle \equiv \langle \mathcal{A}, a'_1, \ldots, a'_m \rangle$ és így 1.18 miatt van $h : Sg^{\mathcal{B}}(b'_1, \ldots, b'_m) \longrightarrow Sg^{\mathcal{A}}(a'_1, \ldots, a'_m)$ izomorfizmus, amire $h\bar{b}' = \bar{a}'$; ennek bármilyen injektív kiterjesztése beágyazás, és van is ilyen, mert $B \setminus \mathrm{dom}(h)$ $B \setminus \{ \bar{b}' \}$ névtelen elemeiből áll (akik legfeljebb megszámlálható sokan vannak), $A \setminus \mathrm{ran}(h)$ pedig $A \setminus \{ \bar{a}' \}$ névtelen elemeiből áll, akik viszont pontosan megszámlálható sokan vannak.

Feltehetjük tehát, hogy $\langle \mathcal{B}, \bar{b}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle$ (mert $\langle \mathcal{B}, \bar{b}' \rangle$ helyett vehetjük a beágyazás szerinti képét). 1.6 segítségével fogjuk belátni, hogy $\langle \mathcal{B}, \bar{b}' \rangle \preceq \langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle$. Tegyük fel, hogy $\langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle \models \exists x \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[e_1, \ldots, e_n]$, ahol $e_1, \ldots, e_n \subseteq B$, és legyen $d \in A$ ennek egy tanúja. Ha $d \in B$, akkor nincs mit csinálnunk, ellenkező esetben viszont rögzítsünk egy olyan $e \in B \setminus \{ b'_1, \ldots, b'_m, e_1, \ldots, e_n \}$-t, amit egy φ-ben nem előforduló $c \in \mathcal{L}$ konstans nevez meg (ilyenből végtelen sok van). Legyen $\mathcal{L}^- = \mathcal{L}(\bar{c}) \setminus \{ c \}$ (ahol $\mathcal{L}(\bar{c})$ a $\langle \mathcal{B}, \bar{b}' \rangle$ nyelve). Világos, hogy A-nak az a g permutációja, ami az identitástól csak annyiban tér el, hogy d-t és e-t felcseréli, automorfizmusa $\langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle \restriction \mathcal{L}^-$-nek és helybenhagyja $e_1, \ldots, e_n$-t. Következésképp

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[d, e_1, \ldots, e_n] \\ \iff & \langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle \restriction \mathcal{L}^- \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[d, e_1, \ldots, e_n] \\ \iff & \langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle \restriction \mathcal{L}^- \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[g(d), e_1, \ldots, e_n] \\ \iff & \langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[g(d), e_1, \ldots, e_n], \end{aligned}$$

azaz $\langle \mathcal{A}, \bar{a}' \rangle \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)[e, e_1, \ldots, e_n]$.

5.3. Feladat. Ha $\mathcal{A}$ λ-szaturált, akkor $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$ is az minden λ-nál rövidebb $\bar{a} \in A$-ra.

5.4. Lemma. *Az alábbiak ekvivalensek*

(i) *$\mathcal{A}$ λ-szaturált*

(ii) *minden λ-nál rövidebb $\bar{a}$ A-sorozatra igaz, hogy ha az $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$ nyelvén felírt $\Gamma(x)$ formulahalmaz minden véges része kielégíthető $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$-ban, akkor $\Gamma(x)$ is.*

(iii) *minden $\mathcal{B}$-re és minden olyan λ-nál rövidebb $\bar{a}$, $\bar{b}$ A ill. B-beli sorozatra amire $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$, igaz az, hogy minden $e \in B$-re van $d \in A$, hogy $\langle \mathcal{A}, \bar{a}d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{b}e \rangle$.*

(iii)-at érdemes 3.15-vel összevetni.

Biz. (i) $\Rightarrow$ (iii) 5.3 miatt elég az állításnak azt a speciális esetét bizonyítani, amikor $\bar{a}$ és $\bar{b}$ üresek. Legyen tehát $e \in B$; akkor $tp_{\mathcal{B}}(e)$ konzisztens $\mathrm{Th}\,\mathcal{B} = \mathrm{Th}\,\mathcal{A}$-val, $\mathcal{A}$ λ-szaturáltsága miatt ezért van $d \in A$ amire $tp_{\mathcal{A}}(d) = tp_{\mathcal{B}}(e)$. De akkor 2.3 miatt $\langle \mathcal{A}, d \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, e \rangle$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Legyen $\bar{a} \subseteq_\lambda A$ és $\Gamma(x)$ konzisztens $\mathrm{Th}\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$-val. Akkor van olyan $\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle$ és $e \in B$, hogy $\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle \models \mathrm{Th}\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$ (azaz $\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle \equiv \langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$) és $\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle \models \Gamma(x)[e]$, azaz $\Gamma(x) \subseteq tp_{\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle}(e)$. A feltevés miatt van olyan $d \in A$, amire $\langle \mathcal{B}, \bar{b}e \rangle \equiv \langle \mathcal{A}, \bar{a}d \rangle$, azaz (ld. 2.3) amire $tp_{\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle}(d) = tp_{\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle}(e)$. Tehát d megvalósítja $\Gamma(x)$-et $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle$-ban.

Végül (i) és (ii) ekvivalenciája következik 2.9-ből. □

5.5. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ λ-szaturált, akkor minden λ-nál rövidebb $\bar{a}$ A-sorozatra $\langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle$ megvalósít minden, az elméletével konzisztens $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ formulahalmazt.*

Biz. Legyen $\bar{a}$ és $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ mint az állításban. Akkor van olyan $\langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle$-val elemien ekvivalens $\langle\, \mathcal{B}, \bar{b} \,\rangle$, ami megvalósitja Γ-t, azaz amiben van $e_1, \dots, e_n$, hogy $\langle\, \mathcal{B}, \bar{b} \,\rangle \models \Gamma(x_1, \dots, x_n)[e_1, \dots, e_n]$. 5.4(iii)-at n-szer alkalmazva kapunk $d_1, \dots, d_n \in A$-t, amire $\langle\, \mathcal{A}, \bar{a}, d_1, \dots, d_n \,\rangle \equiv \langle\, \mathcal{B}, \bar{b}, e_1, \dots, e_n \,\rangle$, és így $tp_{\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle}(d_1, \dots, d_n) = tp_{\langle \mathcal{B}, \bar{b} \rangle}(e_1, \dots, e_n) \supseteq \Gamma(x_1, \dots, x_n)$, azaz $\langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle$ is megvalósítja Γ-t. □

5.6. Tétel (v.ö. 3.19)**.** *Ha $\mathcal{A}$ λ-szaturált, akkor minden vele elemien ekvivalens, legfeljebb λ számosságú modell elemien beágyazható $\mathcal{A}$-ba.*

Biz. 5.4(iii) és 3.18(i). □

5.7. Tétel (v.ö. 3.23)**.** *Ha $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ azonos számosságú szaturált modellek, akkor $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Biz. 5.4(iii) és 3.20(i). □

5.8. Tétel (v.ö. 3.17)**.** *Ha $\mathcal{A}$ λ-szaturált, akkor λ-homogén.*

Biz. 5.4(iii). □

5.9. Következmény (v.ö. 3.22)**.** *Ha $\mathcal{A}$ szaturált, akkor erősen $|\mathcal{A}|$-homogén.*

Biz. 5.8 és 3.21. □

5.10. Következmény (v.ö. 3.27)**.** *Ha $\mathcal{A}$ λ-szaturált és $\bar{a}$, $\bar{b}$ λ-nál rövidebb A-beli sorozatok, akkor az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) $\langle\, \mathcal{A}, \bar{a} \,\rangle \equiv \langle\, \mathcal{A}, \bar{b} \,\rangle$
(ii) *$\mathcal{A}$-nak van $\bar{a}$-t $\bar{b}$-be vivő automorfizmusa*
(iii) $tp_{\mathcal{A}}(\bar{a}) = tp_{\mathcal{A}}(\bar{b})$

Biz. (i)-ből következik (ii) 5.3 és 5.7 miatt, (ii)-ből triviálisan következik (iii), (iii)-ból pedig 2.3 miatt következik (i). □

5.11. Tétel. *Ha T teljes elmélet az $\mathcal{L}$ megszámlálható nyelven, akkor T-nek pontosan akkor van megszámlálható szaturált modellje, ha minden n-re $S_n(T)$ legfeljebb megszámlálható.*

Biz. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, hiszen egy megszámlálható modell csak megszámlálható sok típust tud megvalósítani.

Az elégségesség bizonyítása nagyon hasonló 2.16 bizonyításához. Legyen $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{\, c_i : i \in \omega \,\}$, ahol c_i-k új konstansjelek. Minden n-re és $\Delta(x_1, \dots, x_n, x) \in S_{n+1}(T)$-re legyen $\Gamma_\Delta(x) = \{\, \varphi(c_1/x_1, \dots, c_n/x_n, x) : \varphi(x_1, \dots, x_n, x) \in \Delta \,\} \subseteq \mathcal{L}(c_1, \dots, c_n)$. $\Gamma_\Delta(x)$ maximálisan konzisztens T-vel az $\mathcal{L}(c_1, \dots, c_n)$ nyelvben, mert ha T-nek van $\Gamma_\Delta(x) \cup \{\, \psi(x) \,\}$-et megvalósító $\mathcal{A}$ modellje, akkor $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}$ megvalósítja $\Delta(x_1, \dots, x_n, x) \cup \{\, \psi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n, x) \,\}$-et, tehát $\psi(x_1, \dots, x_n, x) \in \Delta$ és így $\psi(x) \in \Gamma_\Delta(x)$. A $\Delta \mapsto \Gamma_\Delta$ leképezés tehát $S_n(T)$-ből ....-ba képező függvények úniója.

Mint 2.16 bizonyításában, most is csinálunk egy $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$ elméletsorozatot az $\mathcal{L}^+$ nyelvben úgy, hogy $T^+ = T \cup \bigcup \{\, T_i : i \in \omega \,\}$ teljes és konzisztens, és van olyan megszámlálható modellje, aminek $\mathcal{L}$-reduktuma szaturált.

T^+-szal szemben most csak kettő plusz végtelen elvárásunk van:

(1) minden $\varphi \in Sent(\mathcal{L}^+)$-ra φ és $\neg\varphi$ valamelyike T^+-beli

($2_{\varphi(x)}$) ha $\exists x\varphi(x) \in T^+$, akkor $\varphi(c) \in T^+$ egy új konstansra

(3) minden $\Delta(x_1, \ldots, x_n, x) \in S_{n+1}(T)$-re ha $\Gamma_\Delta(x)$ konzisztens T^+-szal, akkor van olyan c konstans, amire $\Gamma_\Delta(c/x) \subseteq T^+$.

Ha ezeket mind ki tudjuk elégíteni, akkor T^+ kanonikus modelljének $\mathcal{L}$-reduktuma jó lesz. Egyrészt (1), (2) és 1.19 miatt ez modellje $T \subseteq T^+$-nak. Minden zárt t termre a $\exists x(x = t)$ formula konzisztens T^+-al, így (1) miatt eleme is, tehát (2) szerint a modell minden elemét megnevezi egy új konstans. Ezért a modell megszámlálható. Azt kell már csak megmutatni, hogy szaturált. Ha $\mathcal{A}$ a T^+ kanonikus modellje és $Y \subseteq_\omega A$, akkor van olyan n, hogy $Y \subseteq \{ c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_n^{\mathcal{A}} \}$. Nyilván elég belátni, hogy ha $\Gamma(x) \subseteq \mathcal{L}(c_1, \ldots, c_n)$ konzisztens $\mathrm{Th}(\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}(c_1, \ldots, c_n)) \subseteq T^+$-szal, akkor meg is valósul $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}(c_1, \ldots, c_n)$-ben. De ha $\Gamma(x)$ ilyen, akkor $\{ \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n, x) : \varphi(x) \in \Gamma(x) \}$ konzisztens T-vel, tehát része egy $\Delta(x_1, \ldots, x_n, x) \in S_{n+1}(T)$ típusnak, amire viszont $\Gamma \subseteq \Gamma_\Delta$. (3) miatt $\mathcal{A}$ megvalósítja Γ_Δ-t, tehát $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}(c_1, \ldots, c_n)$ megvalósítja Γ-t.

A szakértőkkel szemben most nem az az elvárásunk, hogy véges és konzisztens T_i elméletek gyártsanak, hanem hogy olyan konzisztens elméleteket, amikben csak véges sok új (azaz $\mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}$-beli) konstans szerepel.

A kettő plusz végtelen szakértőből (1) és a ($2_{\varphi(x)}$) ugyanazt csinálják, mint 2.16 bizonyításában, (3) pedig felsorolja $\bigcup\{ S_n(T) : n \in \omega \}$-t ω rá jutó részhalmaza (X) mentén, és ha megkapja T_{i-1}-et (mert $i \in X$) és i a $\Delta(x_1, \ldots, x_n, x) \in S_{n+1}(T)$ sorszáma és $\Gamma_\Delta(x)$ konzisztens $T \cup T_{i-1}$-gyel, akkor vesz egy eddig még nem felhasznált új c konstanst (ezt megteheti, mert T_{i-1}-ben csak véges sok új konstans szerepel) és T_i-t $T_{i-1} \cup \Gamma_\Delta(c/x)$-nek választja. T_i így konzisztens lesz, mert ha $a \in A$ megvalósítja $\Gamma_\Delta(x)$-et $T \cup T_{i-1}$ egy $\mathcal{A}$ modelljében, akkor $\mathcal{A}$-t úgy kiterjesztve, hogy benne c jelentése a legyen, $T \cup T_i$ egy modelljét kapjuk. □

5.12. Tétel (Vaught). *Ha T teljes elmélet egy megszámlálható nyelven, akkor biztosan nem pontosan két megszámlálható modellje van.*

Biz. Először is, az atomi modell definíciójából következik, hogy ha $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ és $\mathcal{B}$ atomi, akkor $\mathcal{A}$ is atomi. Ezért aztán ha egy megszámlálható nyelven felírt elmélet nem ω-kategorikus, akkor a megszámlálható szaturált modellje (ha van neki ilyen) nem lehet atomi, mert akkor 5.6 miatt minden megszámlálható modellje atomi lenne, ellentmondva 3.23-nak.

Tegyük most fel, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a T két megszámlálható modellje. Két megszámlálható modell legfeljebb megszámlálható sok típust tud megvalósítani, tehát 5.11 miatt az egyik, mondjuk $\mathcal{B}$, szaturált. A fentiek miatt $\mathcal{B}$ nem lehet atomi. De akkor $\mathcal{A}$ atomi, mert 3.10 miatt T-nek van atomi modellje is. Mivel $\mathcal{B}$ nem atomi, van olyan $b_1, \ldots, b_n \in B$, hogy $tp_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)$-t nem generálja egy formula sem. 5.3 miatt $T^+ = \mathrm{Th}(\langle \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n \rangle)$-nek van megszámlálható szaturált modellje, 5.11 miatt tehát legfeljebb megszámlálható sok típusa van, és így 3.10 miatt van atomi modellje is, mondjuk $\langle \mathcal{C}, d_1, \ldots, d_n \rangle$. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{C}$ sem nem atomi, sem nem szaturált, és így $\mathcal{A}$-tól és $\mathcal{B}$-től is különbözik (miközben természetesen modellje T-nek).

$\mathcal{C}$ nem atomi, mert ha $d_1, \ldots, d_n$ típusát generálná egy formula, akkor $\langle \mathcal{C}, d_1, \ldots, d_n \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n \rangle$ miatt ugyanez a formula generálná $tp_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)$-t is. Másrészt mivel T nem ω-kategorikus, T^+ sem lehet az, a következő miatt: Két $\mathcal{L}$-formula pontosan akkor ekvivalens $\mathcal{B}$ (és így T) szerint, ha ekvivalensek $\langle \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n \rangle$ (és így T^+) szerint; de 4.2(v) miatt valamilyen n-re végtelen sok T szerint nem ekvivalens n szabad változós formula van, az előbbiek miatt tehát T^+ szerint is, így 4.2(v) miatt T^+ sem ω-kategorikus. De akkor a bizonyítás elején álló megfigyelés miatt $\langle \mathcal{C}, d_1, \dots, d_n \rangle$, lévén atomi, nem lehet szaturált. Amiből viszont 5.3 segítségével következik, hogy $\mathcal{C}$ sem az. $\square$

Három megszámlálható modellje viszont lehet egy teljes elméletnek, amint azt a következő példa mutatja.

5.13. Példa. Jelölje $\mathbb{N}^+$ a pozitív természetes számok halmazát, és legyen $\mathcal{L}$ a $\{<\} \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ nyelv, T pedig a „$<$ sűrű rendezés, és $\{c_n < c_m : n < m\}$" elmélet az $\mathcal{L}$ nyelven.

3.24 miatt feltehetjük, hogy T megszámlálható modelljei $\langle \mathbb{Q}, a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+}$ alakúak, ahol a_n szigorúan monoton növő sorozat.

T teljes, mert ha $\langle \mathbb{Q}, a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+}$ és $\langle \mathbb{Q}, b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+}$ T két megszámlálható modellje, akkor elemien ekvivalensek (ebből már következik a teljesség, ld. az 1.23 utáni megjegyzést): ha ui. $\varphi \in Sent(\mathcal{L})$-ben csak a $c_1, \dots, c_m$ konstansok fordulnak elő, akkor

$$\langle \mathbb{Q}, a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+} \models \varphi \iff \mathbb{Q} \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_m/c_m)[a_1, \dots, a_n]$$
$$\iff \mathbb{Q} \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_m/c_m)[b_1, \dots, b_n] \iff \langle \mathbb{Q}, b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+} \models \varphi,$$

ahol a középső ekvivalencia azért igaz, mert 3.24 bizonyításában láttuk, hogy ha $a_1, \dots, a_m$ és $b_1, \dots, b_m$ ugyanúgy vannak rendezve, akkor $\mathbb{Q}$-beli típusaik megegyeznek.

Azt állítjuk, hogy T minden megszámlálható modellje izomorf a páronként nem izomorf

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+} \qquad \mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, 1 - \frac{1}{n} \rangle_{n\in\mathbb{N}^+} \qquad \mathcal{C} = \langle \mathbb{Q}, (1 + \frac{1}{n})^n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+}$$

modellek valamelyikével.

$\mathcal{A}$ nem izomorf $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ egyikével sem, mert ha f izomorfizmus lenne $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ valamelyikéből $\mathcal{A}$-ra, akkor $f(3)$ felső korlátja lenne $\{n \in \mathbb{N}^+\}$-nak. Ha pedig $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ izomorfizmus lenne, akkor $f(1) \in \mathbb{Q}$ legkisebb felső korlátja lenne az $(1 + \frac{1}{n})^n$ sorozatnak.

Legyen $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Q}, a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}^+}$ a T egy modellje. A jelölés egyszerűsítése érdekében a továbbiakban $[a, b]$-t írunk $\langle [a, b] \cap \mathbb{Q}, < \rangle$ helyett (és hasonlóan (félig) nyílt intervallumkra).

Ha $\lim a_n = \infty$, akkor $\mathcal{M} \cong \mathcal{A}$, mert $(-\infty, a_1) \cong (-\infty, 1)$ és $[a_n, a_{n+1}) \cong [n, n+1)$ és ezek az diszjunkt intervallumok lefedik $\mathcal{M}$-t ill. $\mathcal{A}$-t.

Ha $\lim a_n = a \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathcal{M} \cong \mathcal{B}$, mert $(-\infty, a_1) \cong (-\infty, 0)$, $[a_n, a_{n+1}) \cong [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1})$ és $[a, \infty) \cong [1, \infty)$.

Végül ha $\lim a_n = a \notin \mathbb{Q}$, akkor $\mathcal{M} \cong \mathcal{C}$, mert $(-\infty, a_1) \cong (-\infty, 2)$, $[a_n, a_{n+1}) \cong [(1 + \frac{1}{n})^n, (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1})$ és $[a, \infty) \cong [e, \infty)$.

5.14. Feladat. A példabeli három modell közül melyik atomi és melyik szaturált?

6. Megőrzési tételek

6.1. Definíció. *Kvantormentes* egy formula ha atomi formulákból épül fel $\neg$ és $\wedge$ segítségével (azaz pontosan akkor, ha nem szerepel benne kvantor). *Univerzális* egy formula, ha kvantormentes formulákból épül fel $\wedge$, $\vee$ és $\forall$ segítségével. *Egzisztenciális* egy formula, ha kvantormentes formulákból épül fel $\wedge$, $\vee$ és $\exists$ segítségével.

$\forall x P(x) \to \forall x R(x)$ nem univerzális, de $\exists x P(x) \to \forall x R(x)$ ekvivalens a $\forall x \neg P(x) \vee \forall x R(x)$ univerzális formulával.

6.2. Tétel. *Ha φ univerzális formula és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, akkor*

$$\mathcal{B} \models \varphi[\sigma] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\sigma]$$

minden $\mathcal{A}$-hoz tartozó σ kiértékelésre.

Biz. Először is, a tétel állításának következő erősítése:

(1) $\qquad \mathcal{B} \models \varphi[\sigma] \iff \mathcal{A} \models \varphi[\sigma] \qquad$ minden $\mathcal{A}$-hoz tartozó σ kiértékelésre

igaz kvantormentes formulákra, mert 1.3 miatt igaz atomi formulákra, és $\neg$-ra és $\wedge$-ra triviálisan öröklődik. (Azért kell (1) a tételbeli állítás helyett, mert az nem öröklődik $\neg$-ra.)

Végül: mivel $\wedge$-re és $\vee$-ra könnyen látható, hogy öröklődik a tétel állítása, annak belátásához, hogy minden univerzális formulára igaz, elég megnézni, hogy $\forall$-re öröklődik. Tegyük fel, hogy φ-re igaz az állítás. Akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \forall x\varphi[\sigma] \iff & \text{ minden } B\text{-beli } a\text{-ra } \mathcal{B} \models \varphi[\sigma(x/a)] \\ \Rightarrow & \text{ minden } A\text{-beli } a\text{-ra } \mathcal{B} \models \varphi[\sigma(x/a)] \\ \Rightarrow & \text{ minden } A\text{-beli } a\text{-ra } \mathcal{A} \models \varphi[\sigma(x/a)] \qquad \text{ind. felt. miatt} \\ \iff & \mathcal{A} \models \forall x\varphi[\sigma]. \end{aligned}$$

□

6.3. *Megjegyzés.* Minden univerzális formula ekvivalens egy $\forall\bar{x}\psi(\bar{x},\bar{v})$ alakú formulával, ahol ψ kvantormentes. Ezt könnyű belátni az univerzális formulák felépítésére vonatkozó indukcióval: kvantormentes formulákra az állítás trv., az öröklődés univerzális kvantorra szintén, konjunkcióra és diszjunkcióra meg azért öröklődik, mert ha $\models \varphi(\bar{v}) \leftrightarrow \forall\bar{x}\varphi'(\bar{x},\bar{v})$ és $\models \psi(\bar{w}) \leftrightarrow \forall\bar{y}\psi'(\bar{y},\bar{w})$, ahol φ' és ψ' kvantormentesek és $\diamond \in \{\wedge,\vee\}$, akkor

$$\models (\varphi(\bar{v}) \diamond \psi(\bar{w})) \leftrightarrow (\forall\bar{x'}\varphi'(\bar{x'},\bar{v}) \diamond \forall\bar{y'}\psi'(\bar{y'},\bar{w})) \leftrightarrow \forall\bar{x'}\bar{y'}(\varphi'(\bar{x'},\bar{v}) \diamond \psi'(\bar{y'},\bar{w})),$$

ahol $\bar{x'}$, $\bar{y'}$ új változók.

A szakasz hátralevő állításai arról szólnak, hogy a 6.2 tétel mikor és hogyan fordítható meg.

6.4. Tétel. *Ha egy T elmélet megörződik részmodellekre (azaz $(\forall\mathcal{A},\mathcal{B})\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \models T \Rightarrow \mathcal{A} \models T$), akkor ekvivalens egy univerzális elmélettel (azaz van olyan univerzális mondatokból álló T' elmélet, hogy $\mathrm{Mod}(T') = \mathrm{Mod}(T)$).*

Biz. Legyen $T_\forall = \{\, \varphi : \varphi \text{ univerzális és } T \models \varphi \,\}$. Azt kéne belátni, hogy

(1) $$\mathrm{Mod}(T_\forall) = \mathrm{Mod}(T)$$

($\supseteq$) Ha $A \models T$ akkor $\mathcal{A}$ modellje T minden, és így az univerzális következményeinek is.
($\subseteq$) Legyen $\mathcal{A} \models T_\forall$. Akkor $T \cup \mathrm{diag}(\mathcal{A})$ minden véges része kielégíthető, mert tfh. nem: akkor $T \cup \{\psi_1(c_{a_1},\dots,c_{a_k}),\dots,\psi_m(c_{a_1},\dots,c_{a_k})\}$ kielégíthetetlen valamilyen $\psi_1(c_{a_1},\dots,c_{a_k}),\dots,$ $\psi_m(c_{a_1},\dots,c_{a_k}) \in \mathrm{diag}(\mathcal{A})$-ra, azaz $T \models \neg(\psi_1(c_{a_1},\dots,c_{a_k}) \wedge \dots \wedge \psi_m(c_{a_1},\dots,c_{a_k}))$. Mivel $c_{a_1},\dots,c_{a_k}$ nem fordulnak elő T-ben, $T \models \forall x_1 \dots \forall x_k \neg(\psi_1(x_1,\dots,x_k) \wedge \dots \wedge \psi_m(x_1,\dots,x_k))$ és $\forall x_1 \dots \forall x_k \neg(\psi_1(x_1,\dots,x_k) \wedge \dots \wedge \psi_m(x_1,\dots,x_k))$ univerzális (mert $\psi_1,\dots,\psi_m$ kvantormentesek), ezért eleme $T_\forall$-nek, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{A} \models T_\forall \cup \{\exists x_1 \dots \exists x_k(\psi_1(x_1,$ $\dots,x_k) \wedge \dots \wedge \psi_m(x_1,\dots,x_k))\}$.

Kompaktság miatt tehát van $\mathcal{B}$ ami modellje $T \cup \mathrm{diag}(\mathcal{A})$-nak. $\mathcal{B} \restriction \mathcal{L}$ (ahol $\mathcal{L}$ a T nyelve) modellje T-nek, 1.13 miatt pedig $\mathcal{A}$ izomorf $\mathcal{B} \restriction \mathcal{L}$ egy részmodelljével. De T megörződik részmodellekre, tehát $\mathcal{A} \models T$. □

6.5. Következmény. *Ha egy elsőrendű mondat megörződik részmodellekre, akkor ekvivalens egy univerzális mondattal.*

Biz. Tegyük fel, hogy φ megörződik részmodellekre. Az előző tétel miatt van $\{\varphi\}$-vel ekvivalens T' univerzális elmélet. $T' \models \varphi$, tehát kompaktság miatt $\bigwedge_{1\le i\le n} \psi_i \models \varphi$ valamilyen $\psi_1, \dots, \psi_n \in T'$-re. Ezzel kész is vagyunk, mert $\varphi \models \bigwedge_{1\le i\le n} \psi_i$ és $\bigwedge_{1\le i\le n} \psi_i$ univerzális (mert univerzális mondatok konjunkciója). □

Véges modellekre ez a következmény nem igaz:

6.6. Tétel. *Van olyan mondat, ami minden véges modelljének minden részmodelljében is igaz, mégsincs vele (a véges modellek körében) ekvivalens univerzális mondat.*

Biz. Legyen $\mathcal{L} = \{\min, \max, <, R, Q\}$, R binér, Q unér relációjel, és legyen φ a lineáris rendezés axiómái és a

$$\forall x \forall y (R(x,y) \to x < y) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge x < z) \to (y = z \vee y < z))$$

mondat konjunkciója. φ univerzális mondat. Legyen $\varphi' = \forall x (x \neq \max \to \exists y R(x,y))$. $\varphi \wedge \varphi'$ véges modelljeiben tehát R a „közvetlen rákövetkezés” reláció, φ modelljeiben pedig ennek egy része.

(1) $\qquad$ Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \models \varphi$, $\mathcal{B}$ véges, $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \varphi'$, akkor $\mathcal{A} = \mathcal{B}$,

mert tfh. nem, és legyen $b \in B$ a legkisebb elem aki nincs A-ban. b biztosan nem $\min^{\mathcal{B}} = \min^{\mathcal{A}}$, tehát van $\mathcal{B}$-ben (és így a feltevés miatt $\mathcal{A}$-ban) közvetlen megelőzője (a nála kisebb elemek közül a legnagyobb); nevezzük ezt a-nak. $\mathcal{A} \models \varphi'$ miatt $(\exists a' \in A)\langle a, a' \rangle \in R^{\mathcal{A}} \subseteq R^{\mathcal{B}}$; $\mathcal{B} \models \varphi$ és $a <^{\mathcal{B}} b$ miatt tehát $b = a' \in \mathcal{A}$, ami ellentmondás, vagy $a' <^{\mathcal{B}} b$, ami szintén, mert a a legnagyobb b-nél kisebb elem.

Legyen $\eta = \varphi \wedge (\varphi' \to \exists x Q x)$. Azt állítjuk, hogy

(2) $\qquad$ véges struktúrákban η megörződik részmodellekre

Legyen ui. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \models \eta$, $\mathcal{B}$ véges. $\mathcal{A} \models \varphi$ mert φ univerzális. Ha $\mathcal{A} \models \varphi'$, akkor (1) miatt $\mathcal{A} = \mathcal{B} \models \eta$, ha meg $\mathcal{A} \not\models \varphi'$, akkor azért igaz benne η.

Tegyük fel, hogy η véges modelleken ekvivalens a $\chi = \forall x_1, \dots, \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$ (ψ kvantormentes) univerzális mondattal. Legyen $|A| > n+2$, és $\mathcal{A} = \langle A, <^{\mathcal{A}}, \min^{\mathcal{A}}, \max^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$ lineáris rendezés. $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$ választással $\langle \mathcal{A}, Q^{\mathcal{A}} \rangle \not\models \eta$ és így $\langle \mathcal{A}, Q^{\mathcal{A}} \rangle \models \exists x_1 \dots \exists x_n \neg\psi(x_1, \dots, x_n)$, tehát van $a_1, \dots, a_n \in A$, hogy

$$\langle \mathcal{A}, Q^{\mathcal{A}} \rangle \models \neg\psi(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n].$$

$Q' = A \setminus \{\min^{\mathcal{A}}, \max^{\mathcal{A}}, a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ és

$$\langle \mathcal{A}, Q' \rangle \models \neg\psi(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n],$$

(mert ψ kvantormentes[3]), és így $\langle \mathcal{A}, Q' \rangle \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$, azaz $\langle \mathcal{A}, Q' \rangle \not\models \chi$, noha $\langle \mathcal{A}, Q' \rangle \models \eta$, ami ellentmond χ és η ekvivalenciájának. $\square$

A 6.4 tétel következő formája viszont véges modellekre is igaz:

6.7. Tétel. *Ha egy T elmélet megörződik véges modellek részmodelljeire és T nyelve véges, akkor T végesen ekvivalens egy univerzális elmélettel (azaz van olyan univerzális mondatokból álló T' elmélet, hogy $\mathrm{Mod}_\omega(T') = \mathrm{Mod}_\omega(T)$).*

Biz. Tegyük fel, hogy T megörződik véges modellek részmodelljeire, és legyen

$$T_\forall = \{ \varphi : \varphi \text{ univerzális és } T \models_\omega \varphi \}.$$

Azt kéne belátni, hogy

(1) $$\mathrm{Mod}_\omega(T_\forall) = \mathrm{Mod}_\omega(T)$$

($\supseteq$) Ha $A \models T$ és $\mathcal{A}$ véges, akkor akkor $\mathcal{A}$ véges modellje T minden, és így az univerzális véges következményeinek is.
($\subseteq$) Legyen $\mathcal{A} \models T_\forall$ véges. Akkor $T \cup \mathrm{diag}(\mathcal{A})$-nak van véges modellje, mert tfh. nincs, és legyen $\psi_1(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}), \ldots, \psi_m(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ a $\mathrm{diag}(\mathcal{A})$ egy felsorolása ($\mathcal{A}$ és a nyelv véges, tehát $\mathcal{A}$ diagramja is véges). Akkor $T \models_\omega \neg(\psi_1(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) \wedge \ldots \wedge \psi_m(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}))$. Mivel $c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}$ nem fordulnak elő T-ben, $T \models_\omega \forall x_1 \ldots \forall x_k \neg(\psi_1(x_1, \ldots, x_k) \wedge \ldots \wedge \psi_m(x_1, \ldots, x_k))$ és $\forall x_1 \ldots \forall x_k \neg(\psi_1(x_1, \ldots, x_k) \wedge \ldots \wedge \psi_m(x_1, \ldots, x_k))$ univerzális (mert $\psi_1, \ldots, \psi_m$ kvantor-mentesek), ezért eleme $T_\forall$-nek, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{A} \models T_\forall \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_k(\psi_1(x_1, \ldots, x_k) \wedge \ldots \wedge \psi_m(x_1, \ldots, x_k))\}$.

Legyen $\mathcal{B}$ véges modellje $T \cup \mathrm{diag}(\mathcal{A})$-nak. $\mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}$ (ahol $\mathcal{L}$ a ψ nyelve) modellje T-nek, 1.13 miatt pedig $\mathcal{A}$ izomorf $\mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}$ egy részmodelljével. De T megörződik véges modellek részmodelljeire, tehát $\mathcal{A} \models T$. $\square$

7. Interpoláció, definiálhatóság

7.1. Tétel (Keisler-Shelah). *Elemien ekvivalens modelleknek van izomorf ultrahatványuk: ha $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, akkor van olyan I halmaz és U ultrafilter I felett, hogy ${}^I\mathcal{A}/U \cong {}^I\mathcal{B}/U$.*

Biz. Nehéz; a legolvashatóbb bizonyítás Á. Kurucz, *A guide to the Keisler-Shelah theorem* c. cikkében található. $\square$

7.2. Tétel (Robinson konzisztencia-tétel). *Legyen T teljes elmélet az $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ nyelven. Ha T_1 és T_2 a T konzisztens bővítései az $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ nyelven, akkor $T_1 \cup T_2$ konzisztens.*

Biz. Először is

(1) Elég T_1-nek olyan $\mathcal{A}$ és T_2-nek olyan $\mathcal{B}$ modelljét találni, amikre $\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L} \cong \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}$

mert ha $f : \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B} \upharpoonright \mathcal{L}$ izomorfizmus, akkor $\mathcal{B}^+ = \langle \mathcal{B}, R^+, F^+, c^+ \rangle_{R,F,c \in \mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2}$ modellje $T_1 \cup T_2$-nek, ahol $R^+ = \{ \langle fa_1, \ldots, fa_n \rangle : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} \}$, $c^+ = f(c^{\mathcal{A}})$

[3]Kicsit részletesebben: legyen $\mathcal{B}$ az a részmodellje $\langle \mathcal{A}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$-nak, aminek az univerzuma $\{\min^{\mathcal{A}}, \max^{\mathcal{A}}, a_1, \ldots, a_n\}$, $\mathcal{B}'$ pedig az a részmodellje $\langle \mathcal{A}, Q' \rangle$-nek, aminek az univerzuma $\{\min^{\mathcal{A}}, \max^{\mathcal{A}}, a_1, \ldots, a_n\}$. Akkor $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ (mert $\langle \mathcal{A}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$ és $\langle \mathcal{A}, Q' \rangle$ csak Q jelentésében különböznek, de Q jelentése $\mathcal{B}$-ben és $\mathcal{B}'$-ben is az üres halmaz). 6.2 (1) miatt tehát $\langle \mathcal{A}, Q^{\mathcal{A}} \rangle \models \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{B}' \models \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n] \iff \langle \mathcal{A}, Q' \rangle \models \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$.

és $F^+(f(a_1),\dots,f(a_n)) = f(F^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n))$ minden $a_1,\dots,a_n \in A$-re, mert akkor $\mathcal{B}^+ \restriction \mathcal{L}_2 = \mathcal{B} \models T_2$ és $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^+ \restriction \mathcal{L}_1$ izomorfimus (R^+, F^+ és c^+ definíciója miatt), tehát $\mathcal{B}^+ \restriction \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{A} \models T_1$.

Legyen $\mathcal{A}$ a T_1, $\mathcal{B}$ pedig a T_2 tetszőleges modellje. $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}$ és $\mathcal{B} \restriction \mathcal{L}$ modelljei a teljes T elméletnek, 7.1 miatt tehát van olyan I halmaz és U ultrafilter I felett, hogy ${}^I(\mathcal{A} \restriction \mathcal{L})/U \cong {}^I(\mathcal{B} \restriction \mathcal{L})/U$. Az ultrahatvány definíciójából trv. következik, hogy minden $\mathcal{M}$ modellre $({}^I\mathcal{M}/U) \restriction \mathcal{L} = {}^I(\mathcal{M} \restriction \mathcal{L})/U$; a Łos lemma miatt pedig ${}^I\mathcal{A}/U \models T_1$ és ${}^I\mathcal{B}/U \models T_2$. ${}^I\mathcal{A}/U$ és ${}^I\mathcal{B}/U$ tehát olyan modelljei T_1-nek ill. T_2-nek, amiknek az $\mathcal{L}$-reduktuma izomorf. Ezzel (1) miatt kész is vagyunk. $\square$

7.3. Tétel (Véges Robinson konzisztencia-tétel). *Legyen T teljes elmélet az $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ nyelven. Ha T_1 és T_2 a T bővítései az $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ nyelven, és mindkettőnek van véges modellje, akkor $T_1 \cup T_2$-nek is van véges modellje.*

Biz. Megismételhetnénk 7.2 bizonyítását azzal a különbséggel, hogy 7.1 helyett azt használjuk, hogy elemien ekvivalens véges modellek izomorfak. De nem ezt fogjuk tenni, hanem 7.2-ből bizonyítjuk a tételt.

7.2 miatt $T_1 \cup T_2$-nek van $\mathcal{B}$ modellje, elég lenne azt látni, hogy $\mathcal{B}$ véges.

Legyen $\mathcal{A}$ a T egy véges, mondjuk n-elemű modellje, és legyen φ a „az univerzumnak pontosan n eleme van” $\mathcal{L}$-mondat. Akkor $\mathcal{A} \models \varphi$, és így T teljessége miatt $T \models \varphi$. Node akkor $\mathcal{B} \models \varphi$, azaz $\mathcal{B}$ is n-elemű. $\square$

7.4. Tétel (Craig interpoláció). *Ha $\models \varphi \to \psi$, ahol $\varphi \in \mathcal{L}_1$, $\psi \in \mathcal{L}_2$ mondatok, akkor van olyan θ $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ mondat, hogy $\models \varphi \to \theta$ és $\models \theta \to \psi$.*

Biz. Legyen $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ és tfh. nincs ilyen θ $\mathcal{L}$-mondat. Legyen $T_0 = \{\, \theta \in \mathcal{L} : \models \varphi \to \theta \,\}$. $T_0 \cup \{\neg\psi\}$ minden véges része kielégíthető, ellenkező esetben ui. van olyan $\Gamma \subseteq_\omega T_0$, hogy $\models \bigwedge\Gamma \to \psi$, ami ellentmond a feltevésünknek, mert T_0 definíciója miatt $\models \varphi \to \bigwedge\Gamma$ és $\Gamma \in \mathcal{L}$.

Kompaktság miatt tehát van $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}_2$-modell, hogy $\mathcal{M} \models T_0 \cup \{\neg\psi\}$. Legyen $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M} \restriction \mathcal{L})$. $T \cup \{\neg\psi\}$ konzisztens (mert $\mathcal{M}$ modellje) és $T \cup \{\varphi\}$ is konzisztens, különben ui. van olyan $\Gamma \subseteq_\omega T$, hogy $\models \bigwedge\Gamma \to \neg\varphi$, azaz $\models \varphi \to \neg\bigwedge\Gamma$, amiből T_0 definíciója és $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ miatt $\neg\bigwedge\Gamma \in T_0$, azaz $\mathcal{M} \restriction \mathcal{L}$-ben Γ és $\neg\bigwedge\Gamma$ is igaz, ami ellentmondás.

7.2 miatt tehát $T \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ konzisztens, ami ellentmond $\varphi \to \psi$ érvényességének. $\square$

7.5. Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ egy elsőrendű nyelv, P pedig $\mathcal{L}$-ben nem szereplő relációjel. A $\Sigma(P)$ $\mathcal{L} \cup \{P\}$ mondathalmaz *implicit definiálja* P-t, ha $\Sigma(P)$ minden modelljének $\mathcal{L}$-reduktuma legfeljebb egyféleképpen terjeszthető ki $\Sigma(P)$ modelljévé. (Másszóval ha $\langle \mathcal{M}, R \rangle$ és $\langle \mathcal{M}, R' \rangle$ $\Sigma(P)$ modelljei, akkor $R = R'$; avagy: $\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \models \forall x(P(x) \leftrightarrow P'(x))$, ahol $P' \notin \mathcal{L}$ P-vel azonos aritású relációjel, és $\Sigma(P')$ az az $\mathcal{L} \cup \{P'\}$ mondathalmaz, amit úgy kapunk $\Sigma(P)$-ből, hogy annak minden elemében P összes előfordulását P'-re cseréljük.)

$\Sigma(P)$ *explicit definiálja* P-t, ha van olyan $\theta(x_1,\dots,x_n)$ $\mathcal{L}$-formula, amire

$$\Sigma(P) \models \forall x_1 \dots \forall x_n (P(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \theta(x_1,\dots,x_n)).$$

7.6. Tétel (Beth). *$\Sigma(P)$ implicit definiálja P-t pontosan akkor, ha explicit definiálja P-t.*

Biz. ($\Leftarrow$) Trv.: ha $\Sigma(P) \models \forall x_1 \dots \forall x_n (P(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \theta(x_1,\dots,x_n))$ és $\langle \mathcal{M}, R \rangle \models \Sigma(P)$, akkor $R = \theta^{\mathcal{M}}$.

($\Rightarrow$) Tfh. $\Sigma(P)$ implicit defi P-t. (Ámn. P unér relációjel.) Legyen c új konstansjel. Akkor $\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \models \forall x(P(x) \to P'(x))$ miatt $\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \models P(c) \to P'(c)$, a kompaktság miatt tehát $\Gamma \cup \Gamma' \models P(c) \to P'(c)$ valamilyen $\Gamma \subseteq_\omega \Sigma(P)$ és $\Gamma' \subseteq_\omega \Sigma(P')$ -re. Legyen

$$\psi(P) = \bigwedge \{ \varphi(P) : \varphi(P) \in \Gamma \text{ vagy } \varphi(P') \in \Gamma' \}.$$

Akkor $\psi(P) \wedge \psi(P') \models P(c) \to P'(c)$ (mert $\psi(P) \wedge \psi(P') \models \Gamma \cup \Gamma'$), azaz

$$\psi(P) \wedge P(c) \models \psi(P') \to P'(c).$$

Craig miatt tehát van $\theta(c)$ $\mathcal{L} \cup \{c\}$-mondat, amire

$$\psi(P) \wedge P(c) \models \theta(c) \tag{1}$$

és

$$\theta(c) \models \psi(P') \to P'(c).$$

Utóbbiból viszont

$$\theta(c) \models \psi(P) \to P(c) \tag{2}$$

következik, mert P és P' nem fordulnak elő $\theta(c)$-ben. (1) és (2)-ből viszont

$$\psi(P) \models P(c) \leftrightarrow \theta(c). \tag{3}$$

Node $\Sigma(P) \models \psi(P)$, mert ha $\varphi(P)$ a $\psi(P)$ egy éselendője, akkor $\varphi(P) \in \Gamma \subseteq \Sigma(P)$ és így $\Sigma(P) \models \varphi(P)$, vagy $\varphi(P') \in \Gamma' \subseteq \Sigma(P')$, kövképp $\Sigma(P') \models \varphi(P')$ és ezért $\Sigma(P) \models \varphi(P)$. Tehát (3) miatt $\Sigma(P) \models P(c) \leftrightarrow \theta(c)$, és mivel c nem fordul elő $\Sigma(P)$-ben, ebből $\Sigma(P) \models \forall x(P(x) \leftrightarrow \theta(x))$-et kapjuk. □

7.7. Tétel. *Nincs olyan elsőrendű mondat az* $\mathcal{L} = \{\min, \max, <\}$ *nyelven, aminek a véges modelljei éppen a páratlan elemszámú lineárisan rendezett struktúrák.*

Biz. Minden $n \in \omega$-ra legyen $\mathcal{A}_n = \langle 2n+1, 0, 2n, < \rangle$, $\mathcal{B}_n = \langle 2n+2, 0, 2n+1, < \rangle$ ahol $<$ természetes számok szokásos rendezésének megszorítása. Azt fogjuk belátni, hogy minden $\varphi \in \mathcal{L}$ mondat ami igaz az összes páratlan lineárisan rendezett modellben, igaz egy páros lineárisan rendezett modellben is. Ehhez viszont elég egy olyan U ultrafiltert találni ω-n, amire $\prod \mathcal{A}_n / U \cong \prod \mathcal{B}_n / U$, mert akkor ha φ igaz az összes páratlan lineárisan rendezett modellben, akkor speciel $\mathcal{A}_n$-ben is minden n-re, a Łos lemma miatt tehát $\prod \mathcal{B}_n / U \cong \prod \mathcal{A}_n / U$-ben is, tehát ismét csak a Łos lemma miatt U-nyi sok $\mathcal{B}_n$-ben is.

Legyen U tetszőleges nem-principális ultrafilter ω-n. Hogy fog kinézni $A = \prod \mathcal{A}_n / U$ és $B = \prod \mathcal{B}_n / U$? Az biztos, hogy lineáris rendezések lesznek legkisebb és legnagyobb elemekkel, mert $\mathcal{A}_n$-ek és $\mathcal{B}_n$-ek mind ilyenek, és ezek $\mathcal{L}$-ben leírható tulajdonságok. Ugyanezért az is igaz lesz $\mathcal{A}$-ban és $\mathcal{B}$-ben , hogy $\max^{\mathcal{A}}$ ill. $\max^{\mathcal{B}}$ kivételével minden elemnek van közvetlen rákövetkezője és $\min^{\mathcal{A}}$ ill. $\min^{\mathcal{B}}$ kivételével minden elemnek van közvetlen megelőzője. (Ezt direktben is könnyű látni.) Tehát mindkét ultraszorzat biztosan egy ω-val kezdődik és egy fordított ω-val végződik, és a kettő között valahány $\mathbb{Z}$ van. Tehát elég lenne egy izomorfizmust találni $\mathcal{A}'$-ből $\mathcal{B}'$-be, ahol $\mathcal{A}'$ $\mathcal{A}$-nak az a részmodellje, amit úgy kapunk $\mathcal{A}$-ból, hogy elhagyjuk a „felső, fordított ω-t", $\mathcal{B}'$ pedig hasonlóan keletkezik $\mathcal{B}$-ből. $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$

univerzuma tehát

$$A' = \{\, s/U : s \in \prod_{n\in\omega} A_n \quad \text{és minden } n \in \omega\text{-ra} \quad \{\, i \in \omega : s_i = 2i - n \,\} \notin U \,\}$$

$$B' = \{\, s/U : s \in \prod_{n\in\omega} B_n \quad \text{és minden } n \in \omega\text{-ra} \quad \{\, i \in \omega : s_i = 2i + 1 - n \,\} \notin U \,\}$$

Legyen α az az $A' \longrightarrow B'$ függvény, ami minden $s/U \in A'$-t $s/U \in B'$-be küld[4]. α jóldefiniált és injektív, mert $\prod A_n \subseteq \prod B_n$ és $s, z \in \prod A_n$ pontosan akkor U-ekvivalensek $\prod A_n$-ben ha U-ekvivalensek $\prod B_n$-ben. Az is világos, hogy α rendezéstartó (mert $s/U <^{\mathcal{A}'} z/U \iff \{\, i \in \omega : s_i < z_i \,\} \in U \iff s/U <^{\mathcal{B}'} z/U$) és hogy $\alpha(\min^{\mathcal{A}'}) = \min^{\mathcal{B}'}$.

Az van még hátra, hogy α szürjektív. Legyen $s'/U \in B'$. Mivel s' nem U-ekvivalens $\max^{\mathcal{B}} = \langle\, 2i+1 : i \in \omega \,\rangle$-val, van olyan s'-vel U-ekvivalens $s \in \prod B_n$, amire igaz, hogy $s_i < 2i + 1$ minden $i \in \omega$-ra, azaz hogy $s \in \prod A_n$. $s/U = s'/U \in B'$ miatt

(1) $$\{\, i \in I : s_i = 2i + 1 - n \,\} \notin U \qquad \text{minden } n \in \omega\text{-ra.}$$

Következésképp

(2) $$\{\, i \in I : s_i = 2i - n \,\} \notin U \qquad \text{minden } n \in \omega\text{-ra,}$$

különben volna olyan $n \in \omega$, amire $\{\, i \in I : s_i = 2i + 1 - (n+1) \,\} = \{\, i \in I : s_i = 2i - n \,\} \in U$, ami ellentmond (1)-nek. (2) szerint tehát $s/U \in A'$, és ezt α a B'-beli $s/U = s'/U$-ba viszi. □

7.8. Következmény. *A Beth tétel nem igaz véges modelleken: Van olyan $\mathcal{L}$ nyelv és $\Sigma(P) \subseteq \mathcal{L} \cup \{P\}$ (P unér relációjel) formulahalmaz, ami a véges modellek körében implicit definiálja P-t (vagyis $\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \models_\omega \forall x(P(x) \leftrightarrow P'(x))$), mégsincs olyan $\theta(x) \in \mathcal{L}$ amire $\Sigma(P) \models_\omega \forall x(P(x) \leftrightarrow \theta(x))$.*

Biz. Legyen $\mathcal{L} = \{\min, \max, <\}$, φ=„ $<$ lineáris rendezés, amiben min a legkisebb, max pedig a legnagyobb elem",

$$\psi(P) = P(\min) \wedge \forall x \forall y (x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y) \to (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))),$$

$\Sigma(P)$ pedig a $\{\varphi, \psi(P)\}$ mondathalmaz. $\Sigma(P)$ modelljeiben tehát P a páratlan elemek halmazát jelöli ki. Világos, hogy $\Sigma(P)$ implicit definíció a véges modelleken.

Tegyük fel, hogy van $\theta(x) \in \mathcal{L}$ explicit definíció, azaz $\Sigma(P) \models_\omega \forall x(P(x) \leftrightarrow \theta(x))$. Akkor

(1) $\varphi \wedge \psi(\theta) \wedge \theta(\max)$ véges modelljei a páratlan elemszámú lineárisan rendezett struktúrák,

ami ellentmond 7.7-nek.

(1) bizonyításához tegyük fel először, hogy $\mathcal{A}$ páratlan elemszámú lineárisan rendezett struktúra, és tartalmazza R az $\mathcal{A}$ páratlanodik elemeit. Akkor egyrészt $\langle \mathcal{A}, R \rangle \models \varphi \wedge \psi(P)$, tehát $\langle \mathcal{A}, R \rangle \models \forall x(P(x) \leftrightarrow \theta(x))$, másrészt $\langle \mathcal{A}, R \rangle \models P(\max)$, tehát $\langle \mathcal{A}, R \rangle \models \theta(\max)$ és $\langle \mathcal{A}, R \rangle \models \psi(\theta)$. Mivel R nem fordul elő θ-ban, ezekből kapjuk, hogy $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi(\theta) \wedge \theta(\max)$.

Fordítva, ha $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi(\theta) \wedge \theta(\max)$, akkor $\mathcal{A}$ nyilván páratlan elemszámú lineárisan rendezett struktúra, mert $\mathcal{A} \models \psi(\theta)$ miatt $\theta(x)^{\mathcal{A}}$ az $\mathcal{A}$ páratlanodik elemeit tartalmazza. □

[4] Ez *nem* az identitás-függvény, mert több s-sel ekvivalens sorozat van $\prod B_n$-ben mint $\prod A_n$-ben.

7.9. Következmény. *A Craig-interpolációs tétel sem igaz véges modellek körében.*

Biz. A Craig $\Rightarrow$ Beth (7.6) bizonyítás egy olyan állítást (a kompaktsági tételt) használt, ami nem igaz véges modellek körében. De véges implicit definíciókra a bizonyítás átmegy kompaktság nélkül is. Márpedig az 7.8-beli ellenpéldában $\Sigma(P)$ véges. $\square$

7.10. Tétel. *Ha A_i ($i \in I$) véges halmazok és minden $n \in \omega$-ra van $i \in I$, hogy $n < |A|$, akkor van olyan U ultrafilter I-n, hogy $2^\omega \leq \prod A_i/U$.*

Biz. $n \in \omega$-ra legyen $I_n = \{\, i \in I : 2^n \leq |A_i| < 2^{n+1} \,\}$, és legyen $X_n = I \setminus I_n$. Az $\{\, X_n : n \in \omega \,\}$ halmaz véges metszet tulajdonságú, mert minden $k \in \omega$, $n_1, \ldots, n_k \in \omega$-ra van olyan $m > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, hogy $\emptyset \neq I_m \subseteq X_{n_1} \cap \ldots \cap X_{n_k}$, mert I_n-ek diszjunktak, és feltevés miatt $\forall n (\exists m > n) I_m \neq \emptyset$. Legyen U egy X_n-eket tartalmazó valódi ultrafilter I-n. U egyetlen lényeges tulajdonsága, hogy

(1) $$\text{minden } k \in \omega,\ n_1, \ldots, n_k \in \omega\text{-ra } I_{n_1} \cup \ldots \cup I_{n_k} \notin U$$

mivel $I_{n_1} \cup \ldots \cup I_{n_k}$ komplementere $X_{n_1} \cap \ldots \cap X_{n_k} \in U$.

Ha $i \in I$, akkor van pontosan egy $n \in \omega$, hogy $i \in I_n$: legyen $B_i = {}^n2$, azaz a $\{0, \ldots, n-1\}$-ből a $\{0,1\}$-be képező függvények halmaza. Akkor $|B_i| = 2^n \leq |A_i|$, tehát $|\prod B_i/U| \leq |\prod A_i/U|$, vagyis kész vagyunk, ha sikerül beágyazni ${}^\omega 2$-t $\prod B_i/U$-ba.

$s \in {}^\omega 2$-re legyen $F(s)$ annak az $f(s) \in \prod_I B_i$ sorozatnak az U-ekvivalencia-osztálya, amit minden $n \in \omega$-ra és $i \in I_n$-re az $f(s)_i = s \restriction n$ megkötés definiál. Ez jó definíció, mert I_n ($n \in \omega$) az I egy partíciója. Azt kéne csak belátni, hogy F injektív. De ez rendben van, mert ha $s, z \in {}^\omega 2$ különböznek, akkor van olyan $N \in \omega$, hogy $s_N \neq z_N$, és akkor minden $n > N$-re és $i \in I_n$-re $f(s)_i \neq f(z)_i$, következésképp $\{\, i \in I : f(s)_i = f(z)_i \,\} \subseteq I_0 \cup \ldots \cup I_N \notin U$ ((1) miatt), azaz $F(s) \neq F(z)$. $\square$

7.11. Tétel. *Nincs olyan elsőrendű formula, ami a véges gráfok közül az összefüggőket definiálja.*

Biz. A technika ugyanaz lesz mint 7.7 bizonyításában: vesszük összefüggő, és nem összefüggő gráfok egy ultraszorzatát, és belátjuk róluk, hogy izomorfak.

Legyen $\mathcal{C}$ az a végtelen gráf, ami $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ kontinuum sok példányából áll, ahol $Rzw \iff |z - w| = 1$. $n \in \omega$-ra legyen $\mathcal{A}_n$ a $2n$ elemű kör, $\mathcal{B}_n$ pedig két n-elemű kör diszjunkt úniója. 7.10 miatt (és mert $|\prod \mathcal{A}_n/U| \leq |\prod_{n \in \omega} \mathcal{A}_n| \leq 2^\omega$) van olyan U ultrafilter ω-n, hogy

(1) $$|\prod \mathcal{A}_n/U| = |\prod \mathcal{B}_n/U| = 2^\omega.$$

Mindkét ultraszorzat izomorf $\mathcal{C}$-vel, mert minden elemnek pontosan két szomszédja van és egyikben sincsenek körök, vagyis mindkét ultraszorzat valahány $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ úniója, mégpedig (1) miatt kontinuum soké. $\square$