Kalkulus 2, 2018/19 II. félév, vizsgatematika

1. Topologikus alapfogalmak az $\mathbb{R}^n$ térben.
Metrika. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben és tulajdonságaik. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja, belseje és tulajdonságaik. Sűrű halmaz.

2. Sorozatok az $\mathbb{R}^n$ térben.
Határérték egyértelműsége. Torlódási pont jellemzése sorozattal. Halmaz zártságának jellemzése sorozattal. Cauchy-sorozat. Cauchy-sorozat tulajdonságai. Teljes metrikus terek. Metrikák ekvivalenciája.

3. Kompakt halmazok és függvények.
Kompakt halmaz és alaptulajdonságai. Cantor-féle közösrész-tétel. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai. Kompakt halmazon értelmezett folytonos injekció inverze folytonos. Heine–Borel-tétel.

4. Normált terek. Norma. Az $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett p-norma és végtelen norma. Nyílt, zárt és korlátos halmaz normált térben. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontja. Sorozatok és sorok konvergenciája. Cauchy-sorozatok. Banach-terek. Normált terek szorzata.

5. Skalárszorzatos terek. Skaláris szorzás vektortéren. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer. Bessel-egyenlőtlenség. Parseval-egyenlőség. Összefüggő nyílt halmazok normált térben.

6. Folytonos lineáris leképezések. Folytonos lineáris leképezés normája. A folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai. Norma szubmultiplikativitása. Folytonos multilineáris leképezés normája. Carl–Neumann-féle sor.

7. Függvények.
Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény határértéke és a határérték egyértelműsége. Átviteli elv határértékre. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény adott pontbeli folytonossága és folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Heine-tétel. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel.

8. Függvénysorozat és függvénysor.
A pontonkénti határfüggvény, illetve a pontonkénti összegfüggvény. Függvénysor abszolút illetve normális konvergenciája. Függvénysorozat és függvénysor egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. Weierstrass-tétel (függvénysorok egyenletes konvergenciájáról). A $(C^{\mathrm{b}}(M,V), \|\cdot\|_{\sup})$ függvénytér. Hatványsorok, Cauchy–Hadamard-tétel és Abel-tétel.

9. Függvénysorozat és függvénysor integrálása/deriválása és mátrixfüggvények.
Függvénysorozat és függvénysor tagonkénti deriválhatósága és integrálhatósága. Operátornorma az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések terén. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések folytonossága. Az $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tér teljessége. Az $f(A)$ szimbólum értelmezése, ahol $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan végtelenszer differenciálható függvény esetén, melynek Taylor-sora megegyezik a függvénnyel. Mátrix függvényének kiszámítási módszere a Jordan-felbontás segítségével.

10. Differenciálszámítás alapfogalmai.
Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény pontbeli differenciálhatósága, differenciálhatósága és deriváltja. Függvény deriváltjának az egyértelműsége. Függvények összegének, szorzatának és kompozíciójának deriváltja. Függvény pontbeli iránymenti deriváltja. Függvény parciális deriváltja. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú differenciálható függvények Jacobi-mátrixa és Jacobi-determinánsa.

11. Differenciálhatóság.
Véges növekmények formulája. Függvény gradiense, divergenciája, rotációja. Nabla-szimbólum és Laplace-operátor. Kapcsolat a folytonos differenciálhatóság és a folytonos parciális deriváltak létezése között.

12. Inverz- és implicitfüggvény-tétel, valamint a többszörös differenciálhatóság.
Inverzfüggvény-tétel. Az implicitfüggvény-tétel. Függvény n-szeres differenciálhatósága és n-edik deriváltja. Young-tétel. Taylor-sorfejtés.

13. Szélsőérték.
Függvény lokális maximuma, minimuma, szigorú lokális maximuma és minimuma. Infinitezimális Taylor-formula. Függvény lokális szélsőértékének jellemzése a függvény deriváltjaival. Függvény lokális maximuma és minimuma adott feltétel mellett. A feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Lagrange-multiplikátor.

14. Többváltozós függvények integrálása. Térgörbe, térgörbe paraméterezése és ívhossza. Skalár- és vektorértékű függvény vonalmenti integrálja. Felület, felület paraméterezése, normálvektora és felszíne. Skalár- és vektorértékű függvény felületi integrálja. Tértartomány, tértartomány paraméterezése és térfogata. Skalárértékű függvény integrálja tértartományon.

15. Integráltételek. Skalár- és vektorpotenciálos vektormezők. Csillagszerű és egyszeresen összefüggő halmazok. Elégséges feltétel skalárpotenciál és vektorpotenciál létezéséhez. Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel.

16. Fourier-sorfejtés.
Trigonometrikus függvények és alaptulajdonságaik. Függvény Fourier-együtthatói és Fourier-sora. A k-szor folytonosan differenciálható függvény Fourier-együtthatóinak becslése. A kétszer folytonosan differenciálható periodikus függvények Fourier-sora.

17. Dirichlet-tétel.
Riemann–Lebesgue-lemma (az integrálható függvény Fourier-együtthatóinak konvergenciájáról). Fourier-sor n-edik részletösszegének előállítása a Dirichlet-féle magfüggvénnyel. Dirichlet-féle lokalizációs tétel és következményei.

18. Fejér-tétel.
Sorok Cesaro-összegzése. Fejér-féle magfüggvény. Fourier-sor átlaga és a Fejér-féle magfüggvény kapcsolata. Fejér tétele folytonos függvény Fourier-soráról.