

Minimum követelmény

Kalkulus 2, 2018/19 II. félév

Az alábbi fogalmaknak az ismerete szükséges.

1. Metrikus terek alapjai.

Metrika, $B_r(x)$. Nyílt, zárt, korlátos, sűrű halmaz. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontja. Halmaz belseje és lezártja. Metrikák ekvivalenciája. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sorozat határértéke. Cauchy-sorozat. Kompakt halmaz. Cantor-féle közösrész-tétel. Függvény határértéke. Függvény folytonossága. Átviteli elv határértékre. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Nyílt függvény, homeomorfizmus. Egyenletesen folytonos függvények. Heine-tétel. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel. Heine–Borel-tétel. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok.

2. Normált terek.

Normált tér. Sorozat és határértéke normált térben. Sorozathoz rendelt sor normált térben. Banach-tér. Operátornorma. Operátornorma szubmultiplikativitása. Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer skalárszorozatos téren. Bessel-egyenlőtlenség. Parseval-egyenlőség. Neumann-féle sor. Multilineáris leképezés normája. Pozitív (negatív), pozitív (negatív) definit, szigorúan pozitív (negatív) definit és indefinit multilineáris leképezés.

3. Függvénysorozatok és függvénysorok.

Függvénysorozat határfüggvénye, pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Függvénysor határfüggvénye, pontonkénti, abszolút, normális és egyenletes konvergenciája. Függvénysor egyenletes konvergenciájáról szóló Weierstrass-tétel. Függvénysorozat és függvénysor tagonkénti differenciálhatósága és integrálhatósága. Hatványsorok. Konvergenciasugár, Cauchy–Hadamrad-tétel és Abel-tétel hatványsorokról.

4. Differenciálszámítás.

Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény deriváltja. Az összetett függvény deriválási szabálya. Iránymenti derivált. Gradiens. Függvény derivált (Jacobi-) mátrixa. Jacobi determináns. Divergencia és rotáció. Folytonosan differenciálható függvények. Véges növekmények formulája. Young-tétel kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény másodrendű deriváltjaira. Lokális maximum, minimum, szigorú maximum, szigorú minimum, lokális szélsőérték és szigorú lokális szélsőérték. A lokális szélsőérték jellemzése nem elfajult második deriválttal rendelkező skalárfüggvény esetén. A feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Implicit- és inverzfüggvény-tétel.

5. Integrálszámítás.

Térgörbe ívhossza. Skalár- és vektorértékű függvény vonalmenti integrálja. Felület normálvektora és felszíne. Skalár- és vektorértékű függvény felületi integrálja. Tértartomány térfogata. Skalárértékű függvény integrálja tértartományon. Stokes-tétel és Gauss–Osztrogradszkij-tétel. Polár, henger és gömbi koordináták és Jacobi-determinánsuk.

6. Fourier-sorfejtés.

Trigonometrikus polinom. Fourier-együtthatók és Fourier-sor. Dirichlet-féle lokalizációs tétel. Riemann–Lebesgue-lemma. Césaro-összegzés. Fejér-tétel.

Az alábbi tételek bizonyításának az ismerete szükséges.

1. Metrikus tér X részhalmazának belseje az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz; lezártja pedig az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X -et.
2. Metrikus tér részhalmaza pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.
3. Metrikus térnek egy X részhalmaza pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatra $\lim a \in A$ teljesül.
4. Metrikus tér minden kompakt részhalmaza korlátos és zárt.
5. Cantor-féle közösrész-tétel.
6. Átviteli elv folytonosságra.
7. A folytonosság topologikus jellemzése.
8. Metrikus terek között ható folytonos függvény kompakt halmazra kompakt halmazra képez.
9. Heine-tétel.
10. Banach-féle fixponttétel.
11. Heine–Borel-tétel.
12. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.
13. Banach-térben abszolút konvergens sor konvergens.
14. Az A normált terek között ható lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$.
15. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.
16. Normált tér nyílt részhalmaza pontosan akkor összefüggő, ha ívszerűen összefüggő.
17. A $\|\cdot\| : \mathcal{L}(V_1, V_2) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\|A\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$ leképezés norma.
18. Carl–Neumann-féle sor.
19. Metrikus terek között ható folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának a pontonkénti határértéke szintén folytonos függvény.
20. Weierstrass-tétel függvénysor egyenletes konvergenciájáról.
21. Cauchy–Hadamard-tétel.
22. Normált terek között ható függvény deriváltjának egyértelműsége.
23. Normált terek között differenciálható függvény folytonos.
24. Normált terek között ható differenciálható függvények összegének, számszorosának és kompozíciójának differenciálási szabályai.
25. Véges növekmények formulája.
26. Weierstrass approximációs tétele trigonometrikus polinomokról.
27. A $\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ vektorrendszer TONR.
28. Minden $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez.
29. Riemann–Lebesgue-lemma.
30. Konvolúció a Dirichlet-féle magfüggvénnyel.