Kalkulus 2.
2. Zárthelyi dolgozat
2019. 4. 29. 8.15-9.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Legyen *(15 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{y^3-3yx^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y, & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Számolja ki az f függvény parciális deriváltjait. *(5 p.)*

b. Mutassa meg, hogy az f függvény folytonosan differenciálható a $(0,0)$ pontban. *(5 p.)*

c. Legyen $a\in\mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, amely párhuzamos és egyállású az $(2,3)$ vektorral. Számolja ki az $(\mathrm{D}_a\, f)(0,0)$ értékét. *(2 p.)*

d. Adja meg az f függvény $(0,0)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét. *(3 p.)*

2. Jenő, a csodabogár, esti repülése során a $\gamma:[-\pi,\pi[,\ \gamma(t)=(t+\sin t, 1+t, \cos^2 t)$ görbét járja be sokszor egymás után, abban a helységben, melynek hőmérsékletét a szoba (x,y,z) pontjában a $T=\sqrt{x^2+y^2}(6-z)+300$ függvény írja le. Mekkora hőmérsékletváltozás éri Jenőt, amikor a megszokott pályájának $\gamma(0)$ pontján áthalad? ($(\dot{T\circ\gamma})(0)=?$) *(7 p.)*

3. Tekintsük a $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v(r)=r$ vektormezőt. Határozza meg a $\operatorname{grad}\left(\log\|v\|^2\right)$, a $\Delta\left(\log\|v\|^2\right)$ és a $\operatorname{rot}(v\cdot\|v\|^2)$ mennyiséget. *(8 p.)*

4. Tekintsük a *(5+5 p.)*

$$\begin{cases} t^2-t-tuv+uv^3=0\\ t^3-1+u-v^2=0\end{cases}\qquad (*)$$

egyenletetrendszert.

a. Mutassa meg, hogy létezik olyan $u,v:\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{R}^2$ differenciálható függvény, mely a $t_0=1$ pont egy környezetén értelmezett, $u(1)=v(1)=1$ és teljesül rá az $(*)$ egyenletrendszer.

b. Adja meg $u'(1)$ és $v'(1)$ értékét.

5. Legyen F a $(0,0,4)$ csúcspontú, a $z=0$ síkban az $x^2+y^2=4$ vezérgörbéjű kúp palástjának a $z=4$ és a $z=0$ síkok közötti része, valamint tekintsük a $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v(x,y,z)=(x,y,z)$ vektormezőt. Határozza meg $\iint_F v$ értékét. *(10 p.)*