Kalkulus 2.

2. Pótzárthelyi dolgozat

2019. 5. 15. 16.15-17.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Legyen *(15 p.)*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + x, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a.) Számolja ki az f függvény parciális deriváltjait. *(5 p.)*

b.) Mutassa meg, hogy az f függvény folytonosan differenciálható a $(0,0)$ pontban. *(5 p.)*

c.) Legyen $a \in \mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, amely párhuzamos és egyállású az $(2,3)$ vektorral. Számolja ki az $(\mathrm{D}_a f)(0,0)$ értékét. *(2 p.)*

d.) Adja meg az f függvény $(0,0)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét. *(3 p.)*

2. Határozza meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az origó körüli 1 sugarú gömb felszínén. *(7 p.)*

3. Tekintsük a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(r) = r$ vektormezőt és az $a \in \mathbb{R}^3$ vektort. Határozza meg a $\operatorname{grad} \exp\left(\|v\|^2\right)$, a $\Delta \exp\left(\|v\|^2\right)$ és a $\operatorname{rot} \dfrac{a \times v}{\|v\|^2}$ mennyiséget. *(8 p.)*

4. Tekintsük az *(5+5 p.)*

$$\begin{aligned} x^2u + yz^2v + v^3 &= 4 \\ x^4y^2uv &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Legyen $a = (1,2,-1)$ és $b = (1,1)$. (Ekkor az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$, $u_0 = 1$ és $v_0 = 1$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer.)

a.) Mutassa meg, hogy létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt környezete az a pontnak és olyan $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ függvény, melyre $\varphi(a) = b$ és minden $(x,y,z) \in \Omega$ esetén az $u = \varphi_1(x,y,z)$ és a $v = \varphi_2(x,y,z)$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer.

b.) Határozza meg a φ függvény deriváltját az a pontban.

5. Legyen $\Omega = \left\{(x,y,z) \in [0,\infty[\mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$ és $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Határozza meg $\displaystyle\iiint_\Omega f$ értékét. *(10 p.)*