Kalkulus 2.
1. Zárthelyi dolgozat
2019. 3. 11. 8.15-9.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Legyen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris leképezés, melynek mátrixa a standard bázisban $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. (5 + 5 p.)

a.) Határozza meg az A operátornormáját, ha a kiindulási és a képtéren is $\|\cdot\|_1$ a norma.

b.) Határozza meg az A operátornormáját, ha a kiindulási téren $\|\cdot\|_2$ a norma és a képtéren $\|\cdot\|_1$ a norma.

2. Legyen $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$. (3+5+4 p.)

a.) Vázlatosan rajzolja fel az A halmazt.

b.) Igazolja, hogy az A halmaz zárt.

c.) Adja meg az A halmaz határát.

3. Határozza meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ és a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ határértéket, ha az létezik. (4 + 4 p.)

4. Határozza meg, hogy mely valós x értékek esetén konvergensek az alábbi sorok, illetve, hogy ezen a halmazon egyenletesen konvergensek-e a függvénysorok. (5 + 5 p.)

a.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$ b.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \operatorname{arctg}(nx)}{x^4 + (2n+1)!}$

5. Legyen $P(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n 2^{2n}}$. (5 + 5 p.)

a.) Pontosan mely valós x esetén lesz konvergens a hatánysor?

b.) Igazolja, hogy $\displaystyle\int_0^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n 2^{2n}} \right) \mathrm{d}\, x = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ teljesül.

6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, valamint $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$. Határozza meg az $f(A)$ mátrixot. (10 p.)