

**Kalkulus 2.**  
**1. Pótzárthelyi dolgozat**  
 2019. 04. 04. 12.15-13.45

Név:  
 Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ:

1. Legyen  $A = \mathbb{R}^+$  és (3 × 4 p.)

$$d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (x, y) \mapsto \left| \log_2 \frac{x}{y} \right|.$$

- a.) Igazolja, hogy  $d$  metrika az  $A$  halmazon.
- b.) Adja meg a  $B_2(4)$  halmaz elemeit.
- c.) Korlátos-e a  $C = ]0, 1[ \subseteq A$  halmaz ebben a metrikus térben?

2. Legyen  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ . (4 × 4 p.)

- a.) Vázlatosan rajzolja fel az  $A$  halmazt.
- b.) Adja meg az  $A$  halmaz határpontjait.
- c.) Igazolja, hogy az  $A$  halmaz zárt.
- d.) Igazolja, hogy az  $A$  halmaz kompakt.

3. Határozza meg a  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sh}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  és a  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$  határértéket, ha az létezik. (2 × 4 p.)

4. Mutassa meg, hogy minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén (10 p.)

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x^2)}{n^{7/2}} \right)' = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x^2)}{n^{3/2}}$$

teljesül.

5. Minden  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén legyen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{e^{nx}}$ . (3 × 4 p.)

- a.) Milyen  $x \in \mathbb{R}$  esetén létezik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  határérték, és mi lesz az  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  határfüggvény?
- b.) Egyenletesen konvergens-e az  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  függvénysorozat a  $[0, 1]$  halmazon?
- c.) Mi lesz a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n$  határérték?