# Kalkulus 2, 14. hét

## Dirichlet-féle lokalizációs tétel alkalmazásai

I. Legyen $a \in ]0,\pi[$ paraméter. Az alábbi $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorának a segítségével

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq a. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq a. \end{cases}$

igazoljuk, hogy minden $a \in ]0,\pi[$ paraméter esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi - a}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{a\pi - a^2}{2}$$

teljesül.
(Vegyük észre, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k}\right)^2$ teljesül.)

II. Határozzuk meg az alábbi $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát, ahol $a \in ]0,\pi[$ paraméter.

$$f(x) = \begin{cases} \log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|, & \text{ha} \quad |x| < \pi, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| = \pi. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \log\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,\mathrm{d}\,t, & \text{ha} \quad |x| < \pi, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| = \pi. \end{cases}$$

III. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $2\pi$ szerint periodikus, és az

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Fourier-sora egyenletesen konvergens.

1. Határozzuk meg az $f(-x)$ függvény Fourier sorát.
2. Mit mondhatunk az $f$ függvény Fourier-együtthatóiról, ha az $f$ függvény $\pi$ vagy $\pi/2$ szerint periodikus?
3. Mit mondhatunk az $f$ függvény Fourier-együtthatóiról, ha a függvény páros vagy páratlan?

# Cesàro-összegzés

I. Cesàro-összegzés.

1. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}(-1)^n = \frac{1}{2}$, valamint $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_2}(-1)^{n+1}n = \frac{1}{4}$.
2. Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan szám, melyre $|z| = 1$. Mutassuk meg, hogy az $a_n = z^n$ sorozatra

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$
$$\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{1}{1-z} + \frac{z^{n+2}-z}{(n+1)(z-1)^2}$$

teljesül, valamint, hogy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)} = \frac{1}{1-z}$. Tehát $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1} z^n = \frac{1}{1-z}$. Mutassuk meg, hogy $x \in ]0, 2\pi[$ esetén a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ helyettesítéssel

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\cos(nx) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty}{}^{C_1}\sin(nx) = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$$

adódik.

---

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett $\sum a$ *sor $C_k$ (Cesáro-) összegezhető*, valamely $k \in \mathbb{N}^+$ esetén, ha az $s(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ részletösszeg sorozatból képzett

$$\sigma^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} s_i, & \text{ha} \quad k = 1, \\ \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sigma_i^{(k-1)}, & \text{ha} \quad k > 1 \end{cases}$$

sorozatnak létezik véges határértéke, és ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C_k} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(k)}$ jelölést használjuk.