Kalkulus 2, 13. hét

Fourier-sor

I. Igazoljuk a $[-\pi,\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

1. $f(x)=\pi-x$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\pi+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin kx}{k}$
2. $f(x)=|\sin x|$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$
3. $f(x)=\operatorname{sgn} x$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$
4. $f(x)=\pi-\frac{x^2}{\pi}$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\frac{2\pi}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{k^2}$

II. Igazoljuk a $[0,2\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket, ahol $a\in\,]0,1[$.

1. $f(x)=x^2$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos kx-\frac{4\pi}{k}\sin kx$
2. $f(x)=\sin(ax)$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\frac{\sin^2(\pi a)}{\pi a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a\sin^2(\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\cos kx+\frac{k\sin(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\sin kx$
3. $f(x)=x^4$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\frac{16\pi^4}{5}+\sum_{k=1}^{\infty}16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\cos kx-16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\sin kx$
4. $f(x)=\frac{2\pi\,\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x)=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2+k^2}\cos kx-\frac{2k}{a^2+k^2}\sin kx$

A Dirichlet-féle lokalizációs tétel segítségével mutassuk meg a fenti sorok felhasználásával az alábbiakat.

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2}=\frac{1-\pi a\operatorname{ctg}(\pi a)}{2a^2}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2}=\frac{\pi a\operatorname{cth}(\pi a)-1}{2a^2}$