

## Kalkulus 2, 12. hét

### Fizikai alkalmazások

I. Tegyük fel, hogy a Föld egy végtelen kiterjedésű  $d$  vastagságú korong, melynek sűrűsége  $\rho = 5500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Mekkora  $d$  esetén tapasztaljuk közel a Földhöz az  $a = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  gravitációs gyorsulást?

Útmutatás: A korong legyen a

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h \leq z \leq h + d\}$$

tartomány, és az  $m$  tömegű test legyen az origóban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás

$$ma = \int_h^{h+d} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{Gm\rho r z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi dr dz = 2\pi d G m \rho.$$

Vagyis

$$d = \frac{a}{2\pi\rho G} \approx 4256 \text{ km.}$$

II. Tegyük fel, hogy egy  $R \in \mathbb{R}^+$  sugarú gömb, melynek sűrűsége a középpontjától  $r \in [0, R]$  távolságra  $\rho(r)$ , ahol  $\rho \in C([0, R], \mathbb{R}^+)$ . Mekkora a gravitációs gyorsulás a gömb felszínétől  $h \in ]-R, \infty[$  távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a gömb belsejében van a test)?

Útmutatás: Olyan koordinátázást választunk, melyben az integrálási határok egyszerűbbek, viszont ilyenkor az integrálandó függvények bonyolultabbak. A gömb középpontja legyen az origóban, és az  $m$  tömegű test legyen a  $(0, 0, R + h)$  pontban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás (gömbi koordináta-rendszerben)

$$ma = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\pi Gm\rho(r) \frac{r^2 \sin\vartheta (R + h - r \cos\vartheta)}{(r^2 \sin^2\vartheta + (R + h - r \cos\vartheta)^2)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta dr d\varphi.$$

Az

$$\int \frac{\sin\vartheta (a - \cos\vartheta)}{(\sin^2\vartheta + (a - \cos\vartheta)^2)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta = \frac{1 - a \cos\vartheta}{a^2 \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos\vartheta}} + C$$

integrál felhasználásával

$$ma = \frac{Gm}{(R + h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r) r^2 \left( 1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{R + h}{r} - 1\right) \right) dr d\varphi$$

adódik.

A  $h \geq 0$  esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R + h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r) r^2 \sin\vartheta d\vartheta dr d\varphi,$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM}{(R + h)^2},$$

ahol  $M$  a gömb össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a gömb összes tömege a középpontjában lenne.

A  $-R < h < 0$  esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R+h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R+h} \int_0^\pi \rho(r) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi,$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM_h}{(R+h)^2},$$

ahol  $M_h$  a test alatt lévő gömb össztömege. Tehát ebben az esetben nem számít, hogy a test felett még mekkora gömbhéj található.

III. Tegyük fel, hogy a kétdimenziós térben egymástól  $r$  távolságra lévő  $m_1$  és  $m_2$  tömegű pontszerű testek közötti gravitációs erő

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r}.$$

A kétdimenziós térben legyen egy  $R \in \mathbb{R}^+$  sugarú körlap sűrűsége a középpontjától  $r \in [0, R]$  távolságra  $\rho(r)$ , ahol  $\rho \in C([0, R], \mathbb{R}^+)$ . Mekkora a gravitációs gyorsulás a körlap szélétől  $h \in ]-R, \infty[$  távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a körlap belsejében van a test)?

Útmutatás: A  $h \geq 0$  esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM}{R+h},$$

ahol  $M$  a körlap össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a körlap összes tömege a középpontjában lenne.

A  $-R < h < 0$  esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM_h}{R+h},$$

ahol  $M_h$  a próbatest alatt lévő körlap össztömege.

IV. Tekintsünk a háromdimenziós térben egy  $\rho \in \mathbb{R}^+$  sűrűségű  $R \in \mathbb{R}^+$  sugarú

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$$

félgömböt. Hol nagyobb a gravitációs gyorsulás, a  $(0, 0, 0)$  vagy a  $(0, 0, R)$  pontban?

Útmutatás: A  $(0, 0, 0)$  pontban a gravitációs gyorsulás legyen  $a_1$ , a  $(0, 0, R)$  pontban pedig  $a_2$ . Az első esetben legyen a

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő  $m$  tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\varphi \, dr \, d\vartheta = \pi Gm\rho R,$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a  $(0, 0, 0)$  pontban

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{GM}{R^2},$$

ahol  $M$  a félgömb össztömege.

A második esetben legyen a

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2, z \leq R\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő  $m$  tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{R}{\cos \vartheta}} \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\varphi \, dr \, d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R \cos \vartheta} \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\varphi \, dr \, d\vartheta = 2\pi Gm\rho R \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a  $(0, 0, 0)$  pontban

$$a_2 = (3 - \sqrt{2}) \cdot \frac{GM}{R^2}.$$

Tehát  $a_2 > a_1$ .

V. Az  $M \in \mathbb{R}^+$  tömegű homogén (egyenletes sűrűségű) test *tehetetlenségi nyomatékát* egy rögzített tengely körül a

$$\Theta = \rho \cdot \iiint_V f(x, y, z) \, dV$$

kifejezés adja, ahol  $\rho$  a test sűrűsége ( $\rho = \frac{M}{V}$ ) és  $f(x, y, z)$  a test  $(x, y, z)$  koordinátájú pontjának a forgástengelytől vett távolságának a négyzete. Igazoljuk, hogy

1. az  $M$  tömegű  $R$  sugarú gömbnél a középponton átmenő tengely esetén

$$\Theta = \frac{2}{5}MR^2$$

és a gömböt érintő tengely esetén

$$\Theta = \frac{7}{5}MR^2;$$

2. az  $M$  tömegű  $h$  magasságú  $R$  alapsugarú egyenes kúpnál a kúp szimmetriatengelye mentén fekvő forgástengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{10}MR^2$$

a kúp csúcsán átmenő, a szimmetriatengelyre merőleges tengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{5}M \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right)$$

a kúp egy alkotóegyenesé mint tengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{20}M \frac{R^2}{R^2 + h^2} (R^2 + 6h^2).$$